

Tomás Thayer (Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación), M. Alicia Venegas (Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación), Jesús Tejada (Universidad de Valencia), Alberto Lecaros (Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación)

## **AudioGráficos: música y sonido para la enseñanza de gráficos en educación matemática**

### **1. Introducción**

El nivel de abstracción que caracteriza los objetos de estudio de la matemática, lleva a profesores e investigadores en educación y didáctica en el área a buscar estrategias que permita a los alumnos hacer la transición de lo concreto a lo abstracto; desarrollar metáforas para un concepto, observar la aplicación de un teorema o quizás, visualizar una demostración o un procedimiento. Este tipo de investigación también considera la selección de contextos extra matemáticos de situaciones inspiradas en el cotidiano, de aplicaciones en otras ciencias y también en el arte. En esta búsqueda de recursos y situaciones, es interesante pensar en las ventajas que proporcionan la música y el sonido en cuanto a sus componentes físico-matemáticos, que pueden constituir una fuente de situaciones para la enseñanza y el aprendizaje matemático para todos los niveles de educación formal.

En este congreso queremos presentar parte de los resultados de una investigación que consistió en el diseño, implementación y evaluación de cuatro módulos, que hemos denominado MusiMatemática Sonoras Interactivas (MMSI). Cada módulo está compuesto por un software y sus correspondientes actividades de enseñanza y aprendizaje, que invitan a los estudiantes a experimentar e interactuar con sonidos y secuencias musicales para trabajar diferentes conceptos y destrezas matemáticas. Para esta presentación, nos detendremos en uno de ellos, AudioGráficos (AG), cuyo objetivo es el de favorecer los procesos de aprendizaje de representación matemática a través de actividades en las que el alumnado tiene que realizar gráficos de ejes de coordenadas que describen la variación de la frecuencia del sonido en el tiempo.

A continuación, presentaremos brevemente parte del marco teórico de esta investigación, describiremos ambos módulos y los resultados de su aplicación a alumnos de educación general básica de cuatro escuelas públicas de la Región Metropolitana. Los datos recolectados muestran una positiva recepción por parte de alumnos al uso de estos módulos; nuestra conclusión es que el uso del sonido y de la música para el aprendizaje

de la matemática merece una mayor atención por parte de los investigadores en los procesos y materiales de enseñanza y aprendizaje.

## **2. Investigaciones sobre la relación entre música y matemáticas**

Diversos trabajos de investigación han determinado efectos positivos de la música sobre el rendimiento matemático, especialmente cuando se trata de una formación en música a largo plazo. Cheek y Smith (1999), por ejemplo, observaron en alumnos de octavo grado, que recibieron lecciones particulares de música por más de dos años, tuvieron rendimientos significativamente mejores en el ITBS (Iowa Test of Basic Skills) de matemática en comparación a alumnos que no recibieron dichas lecciones. Boyd (2013) analizó el rendimiento en matemática en el CRCT (Criterion-Referenced Competency Test – Georgia) de alumnos de sexto, séptimo y octavo grado del sistema educativo estadounidense y observó que cuando los alumnos participan en música por tres años o más, los resultados en matemática aumentan significativamente. Otros estudios asociados al impacto de la formación musical en el aprendizaje de la matemática, mostraron que alumnos que recibieron más clases de música que las consideradas en el currículum escolar, alcanzaron mejores resultados en test estandarizados en el área de matemática (Beery, 2003; Cardarelli, 2003). Pero más allá de los resultados en diferentes evaluaciones de gran escala, se ha observado que el uso de música en la formación de los niños permite mejorar su razonamiento espacio-temporal (Beery, 2003; Whitehead, 2001), esencial para el desarrollo de habilidades cognitivas.

Es claro que el énfasis en el currículum escolar se encuentra en el desarrollo de las habilidades de lectura y escritura, así como de matemáticas y otras ciencias. En este contexto, algunos investigadores y profesores se han preocupado por generar estrategias que incorporen las artes, y entre ellas la música, en el proceso de enseñanza de la matemática; por ejemplo, el desarrollo de softwares (Bamberger y Disessa, 2003) y actividades utilizando elementos musicales para representar conceptos matemáticos y viceversa, es decir, el uso de expresiones y números para representar tonos y ritmos, o transformaciones melódicas y de la voz (An, 2012; Cachafeiro, 1989; Rudd, 2000).

### 3. Los Registro de Representación Semiótica

De acuerdo con Raymond Duval (2006), los objetos estudiados por la matemática no se encuentran disponibles en el mundo tangible para ser manipulados y explorados; la única forma de acceder a ellos es utilizando algún registro de representación semiótico. En otras palabras, su naturaleza abstracta implica que toda actividad matemática, está mediado por las representaciones semióticas de sus objetos. Por ejemplo, lo gráficos y los sistemas de coordenadas en general son un registro de representación muy utilizado en diferentes áreas de la matemática.

Entendiendo la necesidad de utilizar una representación semiótica para acceder a un objeto matemático, es necesario diferenciar el objeto matemático de su representación. Esta distinción no es menor. Una representación ofrece determinadas características del objeto en estudio que por medio de otra no es posible acceder (Duval, 2006). Por lo tanto, para tener un conocimiento acabado de un objeto matemático, es necesario abordarlo a través de diferentes representaciones semióticas.

Para Duval (2006), lo más importante en la enseñanza de la matemática es que lo estudiantes sean capaces de relacionar diversas maneras de representar un mismo objeto matemático. De acuerdo con lo anterior, toda actividad matemática se sustenta en la capacidad para manejarse dentro de un registro semiótico, así como de poder transitar de un registro a otro. Esto es lo que Duval (2003) denomina habilidades de *transformación* y que consisten en *el tratamiento* y la *conversión*. El tratamiento es una transformación que ocurre dentro del mismo registro semiótico, y la conversión, por otra parte, es la transformación del objeto matemático de un registro semiótico a otro diferente. La mayoría de los estudiantes se detiene en este umbral de conversión de representación, no siendo capaces de reconocer el mismo objeto matemático a través de dos representaciones diferentes (Duval, 2006), que incluso llegan a considerarlos como dos objetos totalmente diferentes. Es por eso que, a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es necesario ofrecer a los alumnos diferentes instancias en las cuales deban moverse de un registro semiótico a otro para el mismo objeto matemático.

Sabemos que el uso de problemas y situaciones inspiradas en el cotidiano y otras

áreas de la ciencia es una importante herramienta en la enseñanza de la matemática. Para Duval (2006), este trabajo ayudaría a los alumnos en la comprensión de los conceptos matemáticos y daría un mayor sentido a las representaciones semióticas de los mismos. La inclusión de problemas prácticos le da un sentido y significado al aprendizaje de la matemática, pero además, hace que los estudiantes apliquen su experiencia física y diaria, junto con sus propias representaciones mentales de los objetos matemáticos en estudio.

#### **4. Sobre la enseñanza y el aprendizaje de gráficos**

El dominio en el uso de un registro gráfico, así como de cualquier otro tipo de registro, incluye la capacidad para ir de un registro gráfico a otro no gráfico y viceversa. Sin embargo, esa conversión no es una simple codificación. En el plano cartesiano consiste en una asociación entre puntos y pares ordenados, pero esa codificación no sería suficiente, por ejemplo, para discriminar la expresión algebraica correspondiente a una gráfica dada. Para ello, es necesaria una *interpretación global* (reconocimiento cualitativo), es decir, que el alumno sea capaz de identificar características visuales que se corresponden con las características de la ecuación algebraica. En contraposición, *una interpretación local*, se centra en puntos o intervalos específicos de la gráfica – intersecciones como los ejes coordenados, intervalos para los cuales la expresión es positiva o negativa –. Si bien, ambos tipos de interpretación son relevantes, los programas de estudio ponen mayor énfasis en este último tipo de interpretación, en desmedro de un trabajo cualitativo (Benitez, 2010).

Existen investigaciones que revelan la existencia de competencias de meta-representación en los niños (Disessa, Hammer, Sherin y Kolpakowski, 1991). En un estudio sobre representaciones estáticas de movimientos físicos, los alumnos mostraron habilidades para interpretar y representar movimientos utilizando formas de representación que ellos mismos habían inventado. Eran capaces de discriminar si una representación era buena o no, realizaban críticas y mejoraban las representaciones utilizadas. Sin embargo, la misma investigación reveló que los alumnos aún tienen mucho que aprenden sobre representaciones gráficas, por ejemplo, para los alumnos era mucho más fácil graficar variaciones de velocidad que de distancia en función del tiempo.

En relación al uso de TIC en el proceso de enseñanza de la matemática, también tienen un impacto en el uso de los registros gráficos. El desarrollo de tecnologías con la capacidad de graficar, - que van desde calculadoras hasta computadores, tablets y teléfonos celulares- , impulsaron el estudio sobre el rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto durante su construcción (Hitt, 2003). El proceso de tratamiento de una representación semiótica puede ser resuelto por medio de calculadoras y computadores; la conversión de un registro de representación a otro es inmediata y las representaciones pueden ser modificadas en tiempo real. En el caso de las representaciones gráficas, las nuevas tecnologías ofrecen la oportunidad de centrar las actividades matemáticas en la interpretación, sea esta global o local. Existen algunos estudios que muestran el poco uso que hacen tanto alumnos como profesores de las representaciones geométricas y gráficas en la resolución de problemas, priorizando un trabajo más algebraico (Hitt, 2003). Sin embargo, ambas representaciones son complementarias y pueden ayudar a la observación de errores en el razonamiento.

## **5. Diseño e implementación de AudioGráficos**

Esta investigación consistió en un trabajo interdisciplinario de entre músicos, matemáticos, programadores, investigadores en didáctica de la matemática y de la música y profesores del área. En una primera etapa se realizó un levantamiento de datos sobre los contenidos y conceptos matemáticos más relevantes en las nuevas Bases Curriculares para educación general básica de Chile (MINEDUC, 2009). De ellos, se seleccionaron cuatro contenidos: operatoria con números enteros, múltiplos y mínimo común múltiplo, gráficos de línea, y fracciones (Thayer et al., 2012). La siguiente fase consistió en una exposición de ideas que relacionaran música y matemáticas bajo un enfoque interdisciplinario centrado en el aprendizaje de las matemáticas. Posteriormente refinadas, clasificadas y filtradas, estas ideas constituyeron modelos de trabajo o prototipos no funcionales. Cada uno de ellos incluyó un concepto matemático a desarrollar y una metáfora musical o sonora que lo debía apoyar. Finalmente, se implementaron cuatro de estos modelos en la plataforma gratuita de programación orientada a objetos, Pure Data (Puckette, 1996), y fue estructurado un guión didáctico dirigido al profesor, en el cual

fueron propuestas actividades de aula siguiendo los principios de la Teoría de las Situaciones didácticas de Brousseau (1998). De esa forma cada módulo MMSI, así como AG, está compuesto por un software desarrollado en PureData y de un guión didáctico para el profesor, los que deben ser articulados por el profesor para la planificación de aula. Además, esperamos que las actividades propuestas en el guión sirva de modelo e inspiración para que el profesor – y porqué no, para los alumnos – también generen nuevas actividades a partir del software.

### **5.1 El módulo MMSI AudioGráficos**

El objetivo de AG es facilitar la interpretación y construcción de gráficos de línea representando información de frecuencia sonora (altura) sobre una línea temporal. En el software de AG alumnado debe escuchar un sonido que varía de frecuencia en el tiempo y debe colocar un único punto en el gráfico para determinar la altura y momento que le corresponde. Según la dificultad aumenta –en función de los parámetros de progresión didáctica implementada en el programa- el alumnado debe colocar dos puntos en el gráfico para patrones ascendentes-descendentes o tres puntos para patrones sonoros complejos. Todo ello se realiza con barrido de frecuencia, es decir, el material sonoro es un *continuum* sin puntos concretos de frecuencia que puedan corresponder a sonidos de escalas reconocibles.

Una representación se produce cuando alguien traduce la sensación sonora a una forma de registro o sistema de notación gráfica que le permite recordar el sonido y, posteriormente, reproducirlo. Cualquier parámetro sonoro –duración, frecuencia, timbre, intensidad- puede representarse mediante un gráfico de coordenadas. Lo habitual es expresar el tiempo en el eje horizontal y el parámetro sonoro en el vertical, de modo que resulte en una línea de frecuencia (o dinámica) que varía con el tiempo. En AG, se ha representado de manera proporcional la variación de la altura de un sonido en relación al tiempo mediante un gráfico de coordenadas cartesianas donde el eje X (horizontal) representa la *duración o tiempo que se mantiene sonando la fuente sonora* y el eje Y (vertical) representa la altura o frecuencia del sonido. Dado que un sonido no es un fenómeno estático, su representación temporal permite establecer las variaciones de

frecuencia en un período de tiempo, que en nuestro caso es de 6 segundos. A la línea imaginaria que une los puntos de máxima frecuencia en el tiempo se le ha denominado *Envolvente*. Existen varios tipos de envolventes temporales dependiendo de la variable que se este midiendo en el eje Y . Por ejemplo, una envolvente que grafica la relación entre la potencia sonora y el tiempo se considera una envolvente dinámica o ADSR en razón de sus momentos: ataque, decaimiento, sostenimiento, extinción (*attack, decay, sustain, release*).

El software de AG está compuesto por dos modos de trabajo: (1) Modo “Explorar”, donde los alumnos descubren las posibilidades y relaciones que ofrece la aplicación; (2) Modo “Jugar”, que corresponde al modo juego de la aplicación, cuyos niveles de dificultad varían en función del número de puntos que pueden ser modificados en el gráfico.

Las actividades propuestas en el guión del profesor están orientadas a estudiantes a partir de tercer año básico y pueden ser realizadas más allá de la clase formal. Las actividades propuestas permitirán al profesor agregar el registro sonoro al aprendizaje, las que tienen por finalidad hacer uso del sentido auditivo y estético durante la enseñanza de la matemática y también explorar matemáticamente elementos musicales y sonoros. En el guión de AG se propone primeramente una actividad en las que se invita a los alumnos a explorar de forma libre el recurso, reconociendo sus características y funcionamientos, además de los contenidos involucrados. Las siguientes actividades tienen como propósito el uso de gráficos para el registro de información sonora, sea construyendo el gráficos que represente las alteraciones de la frecuencia en un intervalo de tiempo, o bien generando el sonido a partir de la información gráfica. Las actividades aquí propuestas, están hechas para el uso del modo “Explorar” del software, donde es el profesor quien construye los gráficos que serán parte de las actividades en aula, considerando las sugerencia entregadas en el mismo guión.

## **5.2 Evaluación de AudioGráficos**

Una vez desarrollados los módulos MMSI, se llevó a cabo un proceso de evaluación de los mismos por parte de alumnos de educación general básica en centros

prioritarios<sup>1</sup> de la Región Metropolitana de Santiago (Chile). Asimismo, se realizó una evaluación de cada módulo por el profesorado, la cual no se muestra en este trabajo. Previamente a la evaluación, se realizó una prueba piloto en un centro educativo de la Región Metropolitana de Santiago (colegio El Encuentro). Respondieron 40 estudiantes de 3°, 4° y 5° de Ed. Básica entre 8 y 13 años. La prueba sirvió para refinar el protocolo de evaluación y el instrumento de recogida de datos.

La muestra para la evaluación del software fue tomada mediante muestreo probabilístico a partir de la población de centros prioritarios de la comuna de Peñalolén, de la Región Metropolitana de Santiago, Chile. Estuvo constituida por 67 estudiantes de 3° y 5° año de educación básica, con edades comprendidas entre 8 y 13 años y que cursaban sus estudios en los centros educativos Tobalaba, Valle Hermoso y Liceo Polivalente A5.

Para la recogida de datos, el equipo de investigación diseñó un cuestionario que fue validado por expertos en los campos de educación matemática y educación musical. Posteriormente, fue refinado a partir de la prueba piloto mencionada anteriormente. Las preguntas del cuestionario expresadas como afirmaciones con alternativas de respuestas en escala de medición a través de iconos (reactivos), permitieron establecer una serie de niveles que expresaron una actitud positiva o negativa con respecto a algún referente relacionado con las actividades desarrolladas por los distintos estudiantes con AG (nivel de confianza del instrumento Alfa de Cronbach= 0,919).

En una primera parte, el cuestionario recogió datos sobre potenciales variables intervinientes con el fin de analizar su influencia como covariables de los resultados de evaluación. En relación a la propia evaluación, el cuestionario incluyó diferentes dimensiones, cada una de ellas constituida por un número determinado de ítems: 1) valoración del aprendizaje matemático; 2) valoración del aprendizaje musical; 3) valoración técnica del programa; 4) valoración global. Cada uno de los ítems fueron afirmaciones en que los estudiantes tuvieron que manifestar el grado de desacuerdo-acuerdo en una escala de 5 puntos.

Además de estas cuatro dimensiones, se incluyó una dimensión emocional, es

---

1

Centros con alumnos en situación de riesgo de exclusión social (con problemas de aprendizaje asociados).



decir, la autopercepción de las emociones a partir de una lista de control de emociones. Esta lista estuvo constituida por un conjunto de 7 emociones positivas y 7 negativas (no pareadas), las cuales los estudiantes debieron marcar si habían creído sentir las durante el trabajo con el programa. En caso contrario, las dejaron desmarcadas. En el análisis de datos, esta dimensión emocional fue puesta en correlación con el resto de dimensiones de evaluación del programa. Por último, se incluyeron 3 ítems abiertos que pretendían averiguar los elementos matemáticos nuevos aprendidos por el alumnado con el programa, los elementos que más gustaban del programa y los elementos que menos gustaban.

La evaluación se realizó en una sesión de trabajo de 90 minutos. Los alumnos fueron conducidos al aula de ordenadores por el profesor de informática (o de matemáticas) y se sentaron individualmente en sus puestos de trabajo delante del computador. El controlador experimental proporcionó a los alumnos instrucciones referidas a AG y a los contenidos matemáticos (guión didáctico) de forma rápida y concisa.

Los datos de evaluación fueron procesados con el programa IBM PSSS, determinando para ello un nivel de confianza del 95%, valor habitual en las CC.SS. en estudios similares. No hubo correlaciones significativas entre las potenciales variables de influencia mencionadas en la sección Control de Variables y las diferentes dimensiones de evaluación del programa.

## **6. Consideraciones a partir de la evaluación de AG**

Se puede concluir que los alumnos de 3º y 5º de Ed. Básica encuentran positiva la experiencia interdisciplinar de aprendizaje de la matemática a través del sonido mediante el módulo MMSI AudioGráficos. Los datos muestran una excelente: todas las dimensiones de evaluación –aprendizaje matemático, aprendizaje musical, global, técnica y afectivo-emocional- han mostrado altas puntuaciones.

Los resultados de la valoración de los ámbitos cognitivo y afectivo-emocional constituyen de facto una triangulación de datos: es lógico pensar que existe una correlación entre la bondad asignada por el alumnado a un mediador didáctico para

aprender una determinada materia y las emociones positivas sentidas durante su uso. Los módulos han propiciado una experiencia emocional variada y ajustada a la lógica de un proceso de aprendizaje. Las acciones necesarias para aprender recogen la incidencia de emociones negativas típicas de un proceso de esfuerzo e incertidumbre ante el aprendizaje con una nueva herramienta. Por ello, es normal la presencia de emociones negativas, tales como estrés, cansancio, preocupación o enfado. No obstante, están mucho más presentes las emociones positivas experimentadas.

Los resultados expuestos permiten concluir que AudioGráficos generaron mayores niveles de satisfacción emocional que de insatisfacción, lo que se ve tanto en las distribuciones de las áreas de estas variables como en la correlación con otras dimensiones de evaluación, lo cual da una visión muy positiva de los procesos emocionales y de regulación desarrollados. Por ello, sería conveniente considerar la importancia de incorporar, con distintas posibilidades y variantes metodológicas, el análisis afectivo-emocional como criterio de valoración, complementario con otros, en la producción de material multimedia con funciones educativas en ámbitos formales y no formales de la educación.

### **Referencias Bibliográficas**

An, S. (2012). *The effects of music-mathematics integrated curriculum and instruction on elementary students' mathematics achievement and dispositions*. Unpublished doctoral dissertation, A&M University, Texas, TX, USA. Retrieved from <http://search.proquest.com/docview/1035271302?accountid=14777>

Bamberger, J., & Disessa, A. (2003). Music as embodied mathematics: a study of a mutually informing affinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8, 123–160. Retrieved from <http://link.springer.com/article/10.1023%2FB%3AIIJCO.0000003872.84260.96>

Beery, E. K. (2003). *Affirming parallel concepts among reading, mathematics, and music through Kodály music instruction*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa City, IA.

Benitez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática*, 22, 1, 5-29. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516662002>

Boyd, J. R. (2013). *The relationship between music participation and mathematics achievement in middle school students*. Unpublished doctoral dissertation, Liberty University, Lynchburg, VA.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cachafeiro, L. (1989). Buscando recursos para el aula [Searching Resources for the classroom]. *Suma*, 4, 43-45.

Cardalleri, D. (2003). *The effects of music instrumental training on performance on the reading and mathematics portions of the Florida Comprehensive achievement test for third grade students*. Unpublished doctoral dissertation, University of Central Florida, Orlando, FL.

Cheek, J. M., & Smith, L. R. (1999). Music Training and Mathematics Achievement. *Adolescence*, 34(13), 759-761.

Disessa, A., Hammer, D., Sherin, B., Kolpakowski T. (1991). Inventing Graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, 117-160.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En Machado, S.(org.) *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas, SP: Papirus Editora.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la asociación matemática Venezolana*, X, 2, 213-223.

MINEDUC (2012). *Matemática Bases curriculares 2012* [Mathematics: curricular bases]. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación, Ministerio de Educación. Recuperado en <http://www.curriculumnacional.cl>

Puckette, M. (1996). Pure Data. *Proceedings of the International Computer Music Conference*. San Francisco: International Computer Music Association, 224-227.

Rudd, S. (2000). *Music as an exemplar of mathematics: implications for integrating math with music education*. Unpublished doctoral dissertation, Claremont Graduate University, Claremont, CA..

Thayer, T., De la Cuadra, P., Tejada, J., Ledermann, R., Cádiz, R., & Petrovich, M. (2012). An interdisciplinary approach for mathematical education based on musical metaphors. In Sánchez, J. (ed) *Nuevas ideas en informática educativa* (pp. 159-165). Santiago, Chile: Universidad de Chile..

Whitehead, B. (2001). *The effect of music- intensive intervention on mathematics scores of Middle and High School students*. Unpublished doctoral dissertation, Capella University, Minneapolis, MN.