UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

"SONIDO Y MÚSICA, UN MEDIO INTERDISCIPLINAR PARA LA ENSEÑANZA DE OBJETOS MATEMÁTICOS; COMPRENDIENDO LOS VECTORES A TRAVÉS DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DE PERCEPCIÓN BINAURAL VIRTUAL"

TESINA PARA OPTAR A GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTOR

DRIYETTE VALERIA ALIAGA ORTEGA

PROFESOR GUÍA MATEMÁTICA

CLAUDIA VALENZUELA GAETE

PROFESOR GUÍA MÚSICA

TOMAS THAYER MOREL

SANTIAGO DE CHILE, ABRIL DE 2017

Agradecimientos

Al finalizar este lago proceso, que he postergado una y otra vez por priorizar otras actividades, tengo la necesidad de agradecer a todas esas personas que, de uno u otro modo, han sido parte es esto, ya sea directa o indirectamente.

En primer lugar, agradecer a mis profesores guías, por tener paciencia y disposición de ayudarme cada vez que lo necesité. A la profesora Claudia Valenzuela Gaete, por esas conversaciones, que, muchas veces salían de nuestro tema principal, pero que lograron formar una linda relación y por la confianza que depositó y sigue depositando en mí. Al profesor Tomás Thayer Morel, porque fue un gran apoyo para mi trabajo, siempre tan actualizado y con ideas innovadoras, con disposición de juntarnos cada vez que se presentara alguna dificultad y por confiar en mis conocimientos e invitarme a ser parte de sus proyectos interdisciplinarios para aportar con mi granito de arena.

También debo agradecer a Alicia Venegas Thayer, porque a pesar de no conocerme, decidió confiar en mí y me invitó a trabajar con ella en un proyecto relacionado con nuestros temas de tesis, en el caso de ella, una tesis doctoral y por ello aprendí cosas nuevas y enriquecedoras, además de conocer a una gran persona.

Agradecer también a mi familia, por aguantar mi carácter molesto, cada vez que me peguntaban por mis avances en la tesina y yo les respondía con una frase no muy amigable, haciéndoles entender que estropeaban el resto de mi día con esa pregunta. Gracias a mi novio, Patricio, por comprender que había fines de semana que no eran de descanso y no podríamos vernos por varios días, por acompañarme en todo el proceso universitario y por seguir ahí, para mí cada día pese a los altos y bajos.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos más cercanos, por la preocupación de mis avances y por pasar estos procesos juntos. Gracias Beatriz, por ser una fiel amiga, por confiar en mí y por demostrarme que puedo contar contigo siempre. Carla, te agradezco por hacerme reír con tu humor tan particular y tus conversaciones cotidianas con citas incluidas, ambas saben que pueden contar conmigo. Y por último, Javier, te agradezco por ser un gran amigo y querer lo mejor para mí cada día.

Gracias a todos los son parte de mi día a día y por dejarme ser parte de sus vidas.

Índice

CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

RESUMEN

El foco principal de esta investigación, fue experimentar con Situaciones Didácticas, mediante una experiencia informática sonora, con sonido virtual controlado, proveniente de una aplicación desarrollada en el software Pure Data. El ambiente utilizado fue una Sonósfera, creada con sonido binaural, con el objetivo de que a partir de éstos, los estudiantes identificaran las posiciones relativas de objetos sonoros, cercanas o lejanas, utilizando vectores bidimensionales u otro modo de representar distancias en el plano mediante un Objeto Matemático. La actividad, se analizó a través de la Ingeniería Didáctica de Michelle Artigue, considerando todas sus fases, del mismo modo, analizando algunos datos cuantitativos previos a la aplicación de la misma.

PALABRAS CLAVE

Situaciones didácticas, ingeniería didáctica, representaciones semióticas, sonósfera, sonido binaural, sonidos virtual, percepción sonora, objeto sonoro, intensidad del sonido, timbre de un sonido, distancia, ubicación en el plano, plano polar, coordenadas polares, plano cartesiano, coordenadas rectangulares, puntos cardinales, vectores bidimensionales.

ABSTRACT

The main focus of this research was to experiment with Didactic Situations, through a sound computing experience, with controlled virtual sound, from an application developed in Pure Data software. The environment used was a Sonosphere, created with binaural sound, with the objective that from these, the students identify the relative positions of sound objects, near or far, using two-dimensional vectors or another way of representing distances in the plane by means of a Mathematical Object. The activity was analyzed through the Didactic Engineering of Michelle Artigue, considering all its phases, in the same way, analyzing some quantitative data previous to the application of the same.

KEYWORDS

Didactic Situations, Didactic engineering, Semiotic representations, Sonosphere, Binaural sound, Virtual Sound, Sound perception, Sound object, Sound intensity, Sound ringer, distance, Location in the plane, polar plane, polar coordinates, Cartesian plane, rectangular coordinates, cardinal points, Two-dimensional vectors.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la incorporación de la tecnología ha ido en crecimiento, generando un cambio significativo en las metodologías utilizadas para lograr los objetivos en diversas áreas, como la publicidad, la comunicación, la educación, entre otras.

Al incorporar la tecnología a la interdisciplinariedad de la educación, se habla de actualidad pura, alcanzar las metas propuestas por la sociedad, pero aún más importante, actualizar la forma de educar a los niños y jóvenes, para que puedan desenvolverse de manera óptima en el mundo de hoy, desarrollando sus capacidades y potencialidades a través de la innovación y la integración de diversas disciplinas.

Actualmente, no está en discusión el hecho de que la música y las matemáticas están estrechamente relacionadas. Cualquiera que se haya acercado a la música, sabe que está llena de patrones, simetrías, repeticiones, entre otros elementos, que no son otra cosa, sino un reflejo de su correspondencia a la matemática.

Basándose en estudios previos, se ha demostrado que la incorporación de la música en la formación de un estudiante, potencia en gran medida, su desempeño en el área de las matemáticas, logrando superar los resultados en comparación a estudiantes que no han tenido esta cercanía al área musical.

El evidente problema de esto, es que no se forman educadores capacitados para trabajar con interdisciplinariedad, mucho menos entre estas áreas, no poseen las herramientas necesarias, los conocimientos, ni las metodologías de integración de contenidos; para lograr el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes a través de la música. Debido a esto surgen las interrogantes; ¿cómo relacionar las disciplinas para lograr los objetivos?, ¿qué herramientas necesita un profesor de matemática, para integrar la música dentro del aula como un recurso para mejorar los aprendizajes?, ¿los profesores están capacitados para implementar la enseñanza interdisciplinar?

Si por un momento se analiza la formación inicial docente, es evidente que falta mucho para lograr la formación integral que se espera, utilizando tanto la tecnología, como la innovación pedagógica en el aula. De aquí, surge la propuesta de tomar como foco de experimentación a los futuros docentes de matemática, conocer la capacidad de identificar elementos matemáticos en una situación virtual, con sonido controlado.

Mediante esta propuesta, una pequeña muestra de estudiantes de primer y tercer año de pedagogía en matemática de la Universidad Metropolita de Ciencias de la Educación, reconocerán vectores bidimensionales en la percepción del sonido, utilizando audífonos para la experimentación y así, distinguir la ubicación relativa de objetos sonoros en una sonósfera, desarrollada en el software libre Pure Data. Además, analizar las posibles representaciones matemáticas que surjan para posicionar objetos sonoros en una realidad virtual.

La actividad se divide en tres partes, la primera consiste en una actividad individual, posteriormente una actividad en grupos de 3 personas y finalmente, una encuesta individual, para analizar las posibles estrategias utilizadas por los estudiantes participantes. Todo esto, se analiza, bajo en marco de la Ingeniería Didáctica.

CAPÍTULO I. ANTECEDENTES, JUSTIFICACIÓN, PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1. Antecedentes

De hace siglos se ha investigado y relacionado la música y la matemática, comenzando con la escuela pitagórica y pasando por compositores musicales, quienes han basado sus obras en elementos matemáticos, como por ejemplo *Bach*; el máximo expositor de la técnica llamada *contrapunto*, la cual, evalúa la relación existente entre dos o más voces independientes, con el objetivo de obtener un equilibrio armónico, *Schöenberg*; con las combinaciones de doce sonidos, llamado *dodecafonismo*, *Webern*; discípulo Schöenberg, con la técnica de la *serialización*, la que propone aplicar el principio serial a otros parámetros del sonido, a diferencia del dodecafonismo, que sólo considera la altura, *Xenakis*; con el cálculo de probabilidades y sus composiciones *estocásticas* y *Stockhausen*; con la técnica de *aleatorización*. Es por esto, que diversos investigadores han trabajado modelos que integran elementos de la música con elementos de la matemática, a través de parámetros y secuencias que posee el sonido.

Según Gardner, la música puede contextualizar de forma significativa muchos conceptos abstractos del área de matemática, los que se trabajan, generalmente, de forma visual o verbal (Gardner, 1993). Se recomienda que cada estudiante pueda mostrar sus propias representaciones de lo que se está enseñando, para presentar diversas formas de un mismo contenido (Spiero y Jehng, 1990).

Tanto en la música como en la matemática, los patrones son fundamentales, ya que agudizan el pensamiento y favorecen la habilidad de razonamiento lógico, debido a que es necesario analizar los patrones para poder repetirlos y comprender sus reglas, llevando así a posibles predicciones de lo que puede pasar en el futuro en determinado patrón. Jonson y Edelson afirman que algunos patrones musicales que se encuentran en los ritmos y en estructura musical, preparan a los niños para poder comprender una variada gama de patrones matemáticos, como por ejemplo las secuencias numéricas de números pares e impares.

También señalan que los estudiantes que poseen formación musical o en las artes suelen tener más destreza en las matemáticas y las ciencias.

Durante los últimos años, el curriculum educativo apunta al aprendizaje significativo de los contenidos, lo que implica que la interdisciplinariedad cumple una función esencial en los procesos de aprendizaje. Por mucho tiempo se enseñaron los contenidos separados entre las distintas disciplinas, pero no ayudaba a los estudiantes a hacer conexiones entre lo que aprendían en la escuela y su vida cotidiana (Carrier, 2011). Además, debido a las exigencias que el sistema está requiriendo a los profesores, se ven enfrentados a situaciones interdisciplinarias más recurrentemente que antes (Johnson y Edelson, 2003). A pesar de esto, no es muy común ver las matemáticas y la música de forma integral, incluso sabiendo que la música ayuda a desarrollar destrezas académicas. La música y las artes se siguen enseñando de forma aislada e independiente del resto de las disciplinas, sin tomar en consideración la estrecha relación que existe entre la física del sonido, los sonidos de la naturaleza y la ciencia con la música (Carrier, 2011).

Algunos investigadores se han interesado en buscar evidencia de que los estudiantes con entrenamiento musical tienen mejores resultados en el estudio de la matemática, a continuación se muestran distintas investigaciones que han relacionado estos hechos.

En el año 2000, Vaughn realizó un estudio en base a encuestas, con el objetivo de buscar evidencia de la influencia de la formación musical en el desempeño matemático. Sus principales cuestionamientos en la discusión fueron:

1. ¿Los individuos que voluntariamente escogen estudiar música tienen un nivel matemático superior que lo que no eligen esta instrucción?
2. Los individuos que cursan un currículum musical escolar obligatorio ¿tienen un mayor nivel de desarrollo matemático como consecuencia de esta instrucción musical?
3. ¿Ayuda la música de fondo a mejorar la habilidad matemática, al menos durante el periodo de escucha, mientras se piensa en problemas matemáticos?

De acuerdo a la evaluación de Vaughn, las respuestas a las dos primeras preguntas es un claro y rotundo sí. En cambio la respuesta a la última pregunta también es afirmativa pero con distintos matices.

En el año 2003, Johnson y Edelson implementaron actividades para profesores y niños, las que tenían por objetivo expresar ideas matemáticas, tales como patrones y razones, utilizando material concreto, en general, los instrumentos musicales. Las actividades propuestas fueron muy variadas, como el uso de símbolos musicales para ilustrar fracciones y el ordenamiento de series numéricas, la obtención de datos para gráficos, el uso del sonido para explorar los conceptos de orden y clasificación, determinación de razones a través de la medida instrumentos musicales de distintas formas y tamaño, la representación de fracciones a través de la duración de las notas musicales, entre otras. Al finalizar su investigación, los autores sugirieron diversos motivos para utilizar la música como una ayuda instrumental en el aprendizaje de la matemática. El primero fue el gran rango de conceptos significativos y destrezas que se pueden enseñar, como el reconocimiento, descripción y transcripción de patrones, la comparación y ordenamiento de atributos de objetos, representación de datos usando figuras y gráficos, así como la aplicación de conceptos matemáticos en la vida cotidiana. El segundo motivo fue la importancia que la integración de música y matemáticas puede tener para los niños que presentan menos destreza en el área lógico-matemática. Un tercer motivo es la facilidad que este tipo de actividades entrega a todo tipo de personas, incluso aquellas que tienen una instrucción musical limitada, dando herramientas para tener éxito en la aplicación. Johnson y Edelson finalizan sugiriendo que los profesores aprovechen las variadas oportunidades que la música ofrece para ayudar en la comprensión matemática y lograr aprendizaje de forma más agradable pero desafiante a la vez.

En el año 2010, Mertoglu realizó un estudio de la relación entre el ritmo y las habilidades matemáticas de niños de 5 y 6 años. En este estudio se utilizó una muestra de 60 niños escogidos en forma aleatoria de 4 escuelas pre-básicas. Se aplicó un formulario de observación de destrezas rítmicas y un test de habilidad matemática intuitiva, con el objetivo de estudiar su correlación. Los resultados de este estudio corroboran la hipótesis que los niños con elevadas destrezas rítmicas poseen altas destrezas matemáticas.

En el año 2011, Song An, Tingting Ma y Mary Capraro realizaron una investigación exploratoria que estudiaba la integración de lecciones de música y matemática como parte de una intervención didáctica para mejorar la actitud de los profesores previo a la clase y su disposición hacia la enseñanza de las matemáticas. En el estudio se seleccionaron aleatoriamente 30 estudiantes y 64 profesores en una universidad. Se impartió una lección de 90 minutos de matemáticas integrada con una actividad de composición musical. Se elaboraron cuestionarios pre y post-intervención con el objetivo de evaluar los cambios en la actitud de los profesores y su disposición hacia la enseñanza. Los resultados demostraron que las lecciones integradas tiene un efecto positivo en la actitud de los profesores y su disposición hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el año 2011, Carrier, Wiebe, Gray y Teachout realizaron una investigación que estudió las experiencias de un equipo de profesores: dos profesores de enseñanza general básica, un profesor de música y un profesor de ciencias, a medida que desarrollaban e implementaban un currículum innovador e interdisciplinario combinando la física y biología del sonido, la comunicación animal, y algunos conceptos y principios fundamentales de la música. Este proyecto implicó el diseño de un currículo para proporcionar a los estudiantes oportunidades de obtener una mayor comprensión de su mundo, abordando más que solo la presentación tradicional de la música y las propiedades físicas del sonido.

En el año 2012, Courey, Balogh, Siker y Paik analizaron los efectos de una intervención académica musical, basada en la comprensión de conceptos relacionados con la notación musical, símbolos de las fracciones, su tamaño y su equivalencia, se escogieron niños de tercer año de una escuela primaria e inmersos en un ambiente multicultural y socioeconómico mixto.los estudiantes se separaron en dos grupos, con condiciones distintas, el primer grupo siguió su programa de enseñanza tradicional de matemáticas (grupo control) y el segundo grupo se sometió a instrucción musical dos veces por semana en sesiones de 45 minutos durante seis semanas (grupo experimental). Los estudiantes del programa académico de música utilizaron este entrenamiento musical y conceptos de fracciones para tratar de solucionar problemas de cálculo de fracciones. Los resultados revelaron diferencias significativas entre el grupo control y el experimental al realizar cálculos de fracciones post test obteniendo un tamaño de efecto grande. Los estudiantes que llegaron a la instrucción con menos conocimientos sobre fracciones respondieron bien a la instrucción y tuvieron un desempeño similar a los sujetos con mayor instrucción previa.

Desde el año 2010, la UMCE, en conjunto con la Pontificia Universidad Catolica de Chile, Universidad Arcis, REUNA, Municipalidad de Peñalolén, Instituto Nacional, Liceo A5 comenzaron a trabajar en el proyecto denominado PICALAB: Laboratorio Virtual para el Programa de Innovación en Ciencia y Arte, financiado por el programa Fondef Tic-Edu de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (Conicyt), a cargo del profesor de música de la UMCE, Tomás Thayer Morel, que tenía por objetivo crear un paquete de aplicaciones informáticas interactivas para implementar una estrategia pedagógica, basada en la metodología de proyectos e integrar las TIC, las Artes y las Ciencias al currículo en los establecimientos escolares a través del desarrollo de estrategias y herramientas didácticas, basadas en metáforas sonoras e implementar espacios interactivos para la enseñanza de las matemáticas de alumnos de 3º, 4º y 5º básico , creando así, actividades virtuales acompañadas de unos módulos (MMSI) o guías didácticas para la aplicación de éstas.

En base a todo lo anterior descrito, esta investigación tiene un carácter similar a PICALAB, pero enfocado en los futuros profesores de matemática, ya que, son ellos los agentes de cambio esenciales para la formación de nuestros niños y adolescentes, para lograr aprendizajes a través de la incorporación de la interdisciplinariedad entre música y matemática.

2. Justificación

Los autores Cheek y Smith (1999) realizaron un estudio, en el cual, pudieron evidenciar que estudiantes de octavo año que recibieron clases de música por más de dos años, obtuvieron mejores resultados que sus compañeros que no recibían ningún tipo de lección de música en la ITBS (Iowa Test of Basic Skills) de matemática y este rendimiento fue aún mejor en estudiantes que recibían clases particulares de piano.

Otro estudio, concluyó que los estudiantes que reciben formación musical intensiva, es decir, más de la considerada en el currículo escolar, obtuvieron mejores resultados en pruebas estandarizadas de matemática (Beery, 2003; Cardarelli, 2003).

Cuando Boyd (2013), analizó el rendimiento en el CRCT (Criterion-Referenced Competency Test – Georgia), obtuvo un resultado similar, es decir que los estudiantes de sexto, séptimo y octavo año que participaron por tres años o más, en lecciones de música de forma activa, mejoraron significativamente el rendimiento en la asignatura de matemática.

Básicamente, con todos los resultados obtenidos a través de estas y otras investigaciones, se ha observado que la utilización de la música en la formación de los niños y adolescentes, facilita el razonamiento espacio-temporal, considerada por muchos científicos como una de las habilidades más importantes en el desarrollo cognitivo (Beery, 2003; Whitehead, 2001).

Por otro parte, la educación actual, con miras de conseguir la comprensión y análisis de los contenidos, sigue utilizando métodos para desarrollar habilidades, más bien, básicas, como la escritura, la lectura, la identificación y la aplicación, muchas veces dejando de lado otras áreas disciplinares, entre ellas la música y el arte. Es por esto, que algunos investigadores han desarrollado estrategias de enseñanza innovadoras y actividades que incorporan la música en el estudio de la matemática, incluyendo los sonidos electroacústicos, utilizando softwares pertinentes al área (Bamberger y Disessa, 2003), considerando los elementos musicales como una forma alternativa de representar conceptos matemáticos, y viceversa, el uso de letras y números para representar tonos y ritmos, o transformaciones melódicas y de la voz (An, 2012; Cachafeiro, 1989; Rudd, 2000).

De aquí, es cuestionable asegurar que los actuales y futuros profesores de matemática están capacitados para realizar una intervención innovadora, es decir, si cuentan con las herramientas mínimas para realizar actividades de tipo interdisciplinar entre música y matemática.

Además, es necesario considerar los requerimientos del sistema escolar chileno y de su currículum vigente. En el Programa de Estudio de tercer año medio, actualización 2009 y con vigencia hasta el año 2019, se plantea que el aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes y la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. También explicita que aprender matemática permite, a las y los estudiantes, dar respuesta a interrogantes y problemas de diferentes campos de conocimiento o a distintos fenómenos de la vida cotidiana. Por otro lado dice que es necesario que *vivan variadas experiencias* para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones; de esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar la matemática. (MINEDUC, 2015).

No está de más, considerar que el programa de estudios, contiene a los vectores como una de las temáticas a tratar durante el año. En el subsector de Números, el aprendizaje esperado número 06 (AE 06), dice: “Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo”, por lo que los estudiantes deben conocer las coordenadas polares previo a aplicar su forma en los números complejos y por otro lado, el subsector de Geometría, el aprendizaje esperado número 12 (AE 12), dice: “describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar”. Para lograr ese aprendizaje esperado, los estudiantes deben conocer el concepto de vector y comprender sus propiedades y utilidades en otros contenidos matemáticos. (MINEDUC, 2015).

Por este motivo, se propone una serie de actividades enfocadas en estudiantes de primer y tercer año de la carrera de pedagogía en matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, como una iniciativa a cambiar las metodologías y estrategias utilizadas, desde la formación inicial docente y dar pequeño paso que permita mirar la educación con otros ojos, considerando nuevas opciones y recursos que el área de la música nos entrega.

3. Descripción de la Problemática

3.1. Problemática de la Investigación

La evidencia indica claramente que el currículo tradicional de matemáticas y los métodos de instrucción no sirven para todos los estudiantes (Hiebert, 1999). El método tradicional de instrucción puede ser infructuoso, porque es incapaz de alcanzar a todos los estudiantes y satisfacer sus necesidades. Así, la instrucción ha impedido que algunos estudiantes aprovechen al máximo sus habilidades y aptitudes (Scott, 2005). En cambio, la enseñanza de las matemáticas a través de estrategias didácticas, pueden ser más efectivas para desarrollar la comprensión conceptual de los estudiantes, haciendo uso de la resolución de problemas, actividades, modelos, simulaciones[1], descubrimientos, desafíos y juegos, se dice que tienen el potencial para cerrar la brecha de rendimiento y reducir la ansiedad matemática (Tobias, 1998; NCTM, 2006).

Dado que se ha demostrado que la integración de las materias tienen efectos poderosos en el aprendizaje, los programas de estudios integrados en las artes pueden proporcionar a los estudiantes una educación democrática, que trasciende las fronteras disciplinarias e involucra a los estudiantes mediante la autorreflexión y la investigación activa (Parsons, 2004).

Según Fiske (1999) y Erickson (2001), la enseñanza a través de las artes puede: transformar los entornos de aprendizaje, alcanzar estudiantes que no sean fácilmente alcanzables, promover la comunicación entre los estudiantes, proporcionar oportunidades para la participación de adultos, ofrecer nuevos retos a los estudiantes exitosos, abordar problemas, cuestiones y conceptos importantes, disminuir la fragmentación curricular, permitir a los profesores y estudiantes explorar el conocimiento más profundamente, desafiar los niveles

---

[1] La perspectiva evolucionista que presenta el artículo: ¿Qué significa comprender una idea Matemática? de Roberto Araya, (2001), respecto a la aplicación de simuladores en el aprendizaje, expone; que el proceso de modelamiento y simulación obliga y permite observar una comprensión profunda del fenómeno del aprendizaje. El autor señala: "construir un simulador, no sólo es un excelente ejercicio que obliga a hacer explícitos todos los componentes y mecanismos que permitan explicar un fenómeno, sino, que nos asegura todos esos elementos sean suficientes para generar algunos aspectos esenciales del fenómeno".

más altos de pensamiento al ayudar a los estudiantes a conectar el conocimiento y conectar el aprendizaje en la escuela con el mundo real.

Se puede observar que la relación entre la matemática y el área artística, es cuestionada e investigada por diversos autores hace mucho tiempo y en los últimos años han descubierto avances asombrosos, pero sobre todo, centrándose en la relación entre la matemática y la música y el estrecho lazo entre ambas disciplinas. Si se considera la composición de ambas, es fácil apreciar que se basan en patrones, son abstractas, utilizan números en su notación y poseen un lenguaje propio. En base a esto, no es difícil pensar que la comprensión de una de estas disciplinas pueda ayudar a entender y decodificar la otra de forma más sencilla, es decir, que estudiar música pueda ayudar a la comprensión de la matemática o viceversa.

En algunas partes del mundo, se han trabajado actividades, en las cuales, utilizan diversos recursos didácticos para ligar la música con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, por ejemplo, el autor Luis Conde, en su publicación titulada “Un acercamiento de las Fracciones por medio de la Música: un Problema de Enseñanza-Aprendizaje”, expuesta en la 24va Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, analiza una serie de actividades propuestas en el libro de sexto grado de educación básica en México (SEP,2000), en las cuales se presentan actividades que involucran el uso de los números fraccionarios relacionadas con las figuras musicales. También en Estados Unidos, los autores An, Capraro y Tillman (2013), realizaron una investigación exploratoria, titulada: “Los maestros de primaria integran actividades de música en las lecciones de matemáticas regulares: Efectos sobre las Habilidades Matemáticas de los Estudiantes” (Elementary Teachers Integrate Music Activities into Regular Mathematics Lessons: Effects on Students’ Mathematical Abilities), que tenía por objetivo, indagar en la forma que los profesores integran música en sus clases regulares de matemática y así también, observar los efectos que mostraba la integración de música-matemática en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes.

Por otra parte, es inevitable pensar en los intereses actuales de los niños y adolescentes y en las necesidades que presentan los estudiantes en cuanto a la tecnología. Por esto, es fundamental considerar la relación entre la música y la matemática desde otro punto de vista, tomando en cuenta la digitalización de la música, es decir, la música electroacústica o electrónica y su composición a través de software.

Pero, según el informe final del Censo de Informática Educativa 2012, a cargo de la Universidad de la Frontera y la empresa Adimark por parte del Ministerio de educación, mostró que la frecuencia de uso por parte de los docentes a nivel nacional, en una escala de 1 a 4, es de 1,7 en zonas urbanas y 1,9 en zonas rurales, lo que confirma que las TIC aún no están siendo integradas como recursos didácticos en los proceso de enseñanza-aprendizaje en Chile.

3.2. Problema de Investigación

Los profesores chilenos de educación media en la asignatura de Matemática, no están capacitados ni poseen las herramientas necesarias para hacer clases enfocadas en el desarrollo de habilidades, utilizando la modalidad interdisciplinar entre matemática y música, a través de actividades didácticas, utilizando softwares educativos.

En el contexto educativo, es propio pensar que utilizar la relación ya comprobada entre música y matemática, podría servir para lograr los objetivos de clase y desarrollar habilidades mucho más significativas en los estudiantes que con las clases tradicionales, pero también surgen diversas interrogantes con estas afirmaciones, en Chile, ¿estamos utilizando estos recursos en el aula?, ¿los profesores están capacitados para implementar la enseñanza interdisciplinar?, ¿de qué forma se podrían implementar actividades de este tipo? Estos son los cuestionamientos principales que basan la propuesta didáctica de esta investigación.

4. Objetivos de la Investigación

4.1. Objetivo General

- Reconocer vectores bidimensionales en una nueva representación, a partir de situaciones didácticas, utilizando como medio el sonido electroacústico en un espacio virtual.

4.2. Objetivos Específicos

- Crear una situación didáctica, en donde se utilice el sonido como medio para representar vectores bidimensionales.
- Adaptar un patch Binaural Ambisonic[2] para una de las situaciones didácticas, utilizando el software Pure Data.
- Crear una guía de uso del patch desarrollado en Pure Data.
- Crear una guía didáctica para el profesor, la que contendrá preguntas dirigidas a los estudiantes para guiar la actividad.
- Crear una guía para el estudiante, que contenga la actividad propuesta y una encuesta de opinión y reflexión.
- Aplicar la actividad con la muestra de estudiantes escogidos de primer y tercer año de pedagogía en matemática, para la experimentación.
- Utilizar el marco de la Ingeniería Didáctica como medio de validación interna de la actividad.

[2] Binaural Ambisonics Roomsimulation - prestación Binaural Ambisonic y evaluación patch en PD, con el modelo físico de una sala de simulación para un oyente y algunas fuentes de sonido (todos móviles). Todo el programa y las secciones del parche están bajo Gnu-GPL. Copyright (C) 2000-2009 Thomas MUSIL [musil_at_iem.at]. IEM - Institute of Electronic Music and Acoustics, Graz. KUG University of Music and Dramatic Arts – Graz. Inffeldgasse 10/3, 8010 Graz, Austria.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

1. Fundamentos Matemáticos de la Música

La matemática, en su inicio, surgen por la necesidad que tenía la gente registrar el paso del tiempo y para llevar un registro de las cosechas, ganado y operaciones comerciales, por tanto, se desarrolla como un sistema de símbolos y palabras para los números, con el fin de realizar los conteos en la vida diaria. Por otro lado, la música surge de la necesidad de protegerse de ciertos fenómenos naturales, de alejar los malos espíritus, de atraer la ayuda de los dioses, honrarlos y con fiestas, celebrar el cambio de estaciones. Pero la relación entre estas dos disciplinas con un origen tan distante, no se realizó hasta que se formó la "Escuela Pitagórica".

1.1. La Escuela Pitagórica

Para hablar de la escuela pitagórica, es fundamental conocer sobre Pitágoras y su legado. Fue un filósofo y matemático de la antigua Grecia, se dice que nació alrededor del año 570 a.C en la isla Somos, actualmente Turquía y murió alrededor del año 475 a.C. Es considerado el primer matemático puro, ya que contribuyó de significativamente al avance de la matemática, tanto en la geometría, como en la aritmética. Todo lo que respecta a Pitágoras es incierto, ya que no hay registros de la época y todo lo que se ha recopilado, fue escrito 200 años después de su muerte en adelante. Algunas teorías dicen que Pitágoras fue el fundador de la escuela pitagórica, en cambio, otras, aseguran fue formada por sus seguidores y la llamaron así en honor a él y sus doctrinas.

La escuela pitagórica, fue una comunidad, fraternidad, hermandad o sociedad, predominantemente religiosa y filosófica, conformada por astrólogos, matemáticos, músicos y filósofos, interesados en todas las disciplinas respectivas y también en la política del momento, su creencia más destacada, se refiere, a que esencialmente, todas las cosas son números. No es posible decir con certeza cuales fueron los aportes de Pitágoras y cuales fueron de los Pitagóricos (discípulos de Pitágoras), ya que éstos, justificaban sus doctrinas citando al maestro Pitágoras, de manera indiscriminada. En adelante, cualquier hallazgo de se le atribuya a Pitágoras, también se considerará como parte de la escuela pitagórica (González, 1994).

Los pitagóricos, buscaban unificar los fenómenos del mundo físico y espiritual en términos de números, esencialmente, en términos de razones y proporciones de números enteros. Con la música no fue diferente, pues, fue Pitágoras quien descubrió que existía una relación numérica entre tonos que sonaban "armónicos" y fue el primero en notar que la música, siendo uno de los medios esenciales de comunicación y placer, podía ser medida por medio de razones de números enteros. Actualmente, se sabe que el sonido producido por tocar una cuerda depende de la longitud, grosor y tensión de la misma, pero fue Pitágoras quien descubrió que al dividir la cuerda en ciertas proporciones, era capaz de producir sonidos placenteros al oído, con esto, recibió una maravillosa confirmación de su teoría.

El experimento de Pitágoras, consistió en dividir una cuerda a la mitad y escuchar el sonido que producía, con esto, notó que producía un sonido que era una octava más aguda que la original, es decir, que tenía la frecuencia que emitía la cuerda estaba a razón de $2:1$ de la original y que cuando la razón era $2:3$, se producía una quinta. También encontró que otras razones sencillas de división de la cuerda, producían sonidos agradables. La cuerda vibra en mitades, tercios, cuartos, entre otros y cada vibración secundaria produce "armónicos", estas longitudes de onda producen una secuencia de armónicos, $1/2, 1/3, 1/4$... de la longitud de la cuerda. Los sonidos son más agudos y menos intensos que el sonido de la cuerda completa, llamada "la fundamental". Pero Pitágoras no sabía nada de armónicos, sólo sabía que la longitud de la cuerda con las razones $2:1$ y $2:3$ producía combinaciones de sonidos agradables y construyó una escala a partir de estas proporciones (Hammel, 1995).

Durante sus experimentos, Pitágoras descubrió y construyó tres intervalos que consideraba proporcionados; el diapasón, el diapente y el diatesarón, actualmente llamados octava, la quinta y la cuarta respectivamente, ya que corresponden al octavo, quinto y cuarto sonido de la que conocemos como "Escala Pitagórica Diatónica", la escala que, por cierto, fue usada por muchos años en el mundo occidental. Actualmente, se utiliza la escala temperada, la cual, tiene algunas diferencias de afinación importantes con respecto a la escala diatónica.

Tabla 1: Diferencias entre escala diatónica y temperada

Nota Base	Semitono (n)	Pitagórica (Hz)	Temperada (Hz)	Relacion Pitagórica	Relacion Temperada	Nombre del Tono
		$T = xp^n$	$T = x \cdot \sqrt[12]{2^n}$			
La (440)	0	440.00	440.00	1	1	Unísono
La#	1	466.17	466.16	1.059466	1.059463	2a Meno
Si	2	493.89	493.88	1.122469	1.122462	2a Mayor
Do	3	523.26	523.25	1.189218	1.189207	3a Mayor
Do#	**4**	**554.37**	**554.37**	**1.259936**	**1.259921**	**3a Mayor**
Re	5	587.34	587.33	1.334860	1.334840	4a Justa
Re#	6	622.27	622.25	1.414239	1.414214	4a Aumentada
Mi	**7**	**659.27**	**659.26**	**1.498339**	**1.498307**	**5a Justa**
Fa	8	698.47	698.46	1.587439	1.587401	5a Aumentada
Fa#	9	740.01	739.99	1.681839	1.681793	6a Mayor
Sol	10	784.01	783.99	1.781851	1.781797	7a Menor
Sol#	11	830.64	830.61	1.887811	1.887749	7a Mayor
La	12	880.03	880.00	2.000073	2.000000	8a Justa

$p = 1.0594663$

Posteriormente, los pitagóricos desarrollaron una división de las disciplinas, llamado “Cuadrivium” que estudiaba las ciencias y el “Trívium” que se preocupaba del lenguaje, en donde la música se consideraba una disciplina matemática, que manejaba relaciones de números, razones y proporciones, por ende, un subconjunto de las ciencias. El Cuadrivium contenía la aritmética, la música, la geometría y la astronomía como objetos de estudio y en conjunto con el Trívium que contenía la gramática, la retórica y la dialéctica, se convirtieron en las siete artes liberales (Mankiewiez, 2000).

1.2. La Edad Media y el Renacimiento

En la edad media, la música siguió considerada como un subconjunto de las ciencias, en específico, la matemática, por lo que era necesario el estudio de ambas disciplinas y era habitual que las personas que se instruían en matemáticas, también estudiaran la teoría de la música, lo cual no implicaba que fueran músicos ejecutantes o compositores.

La longevidad de la tradición pitagórica fue propiciada por Severino Boecio, filósofo y matemático, sus textos de matemáticas fueron usados por siglos. Nacido en Roma en el Siglo V, fue el principal traductor de la teoría de la música en la Edad Media. Escribió "Principios de la música", interpretando los trabajos de Nicómaco, Ptolomeo y Euclides. Severino Boecio creía que la música y las proporciones que representaban los intervalos musicales estaban relacionadas con la moralidad y la naturaleza humana y prefería las proporciones pitagóricas. Como estas especulaciones tomaban de punto de partida la expresión de los intervalos en fracciones matemáticas, la música se ganó su lugar en el cuadrivium. (Hoppin, 1992).

Las concepciones estrechas del medioevo junto con las estrictas doctrinas de la iglesia, el sistema educativo, la falta de aceptación de los números irracionales (los inconmensurables) crearon una atmósfera que impedía el desarrollo de la música puesto que siempre se pretendía respetar esas relaciones.

1.3. La Música de las Esferas

En sus explicaciones, Aristóteles, hace referencia a la escuela pitagórica y la música de las esferas de la siguiente manera:

“Algunos pensadores suponen que el movimiento de los cuerpos celestes debe producir un sonido, dado que en la Tierra el movimiento de cuerpos de menor tamaño produce dicho efecto. Afirman, también, que cuando el sol, la luna y las estrellas, tan grandes y en tal cantidad, se mueven tan rápidamente ¿cómo podrían no producir un sonido inmensamente grande? A partir de este argumento y de la observación de que sus velocidades, medidas por sus distancias, guardan igual proporción que las consonancias musicales, aseveran que el sonido proveniente del movimiento circular de las estrellas corresponde a una armonía.” (Miyara, 2005).

Según Miyara (2005), se trata de la denominada música o armonía de las esferas, comentada también por Platón en su libro “La República”. Parece ser que el hecho de que el sonido no se escuchara era definido por Pitágoras, basándose en el argumento de que al ser un sonido permanente desde el instante del nacimiento, no era distinguible del silencio. Aristóteles ridiculizaba esta teoría, sin proponer una más creíble. La teoría de la música de las esferas sobrevivió casi 2000 años, hasta la época de Kepler, quien se apoyaría en sus descubrimientos en astronomía.

Johannes Kepler (1571-1630) fue un astrónomo y matemático alemán, cuyas tres leyes del movimiento planetario contribuyeron al descubrimiento por Newton de la gravitación universal. En su libro Mysterium Cosmographicum (1596), intentó mostrar el secreto del universo, no sólo mirando la geometría, sino también, la armonía musical como revelaciones de la ley divina. Reconociendo que los planetas giraban alrededor del Sol, perfeccionó la teoría de la “música de las esferas” de los pitagóricos, sugiriendo que los planetas producían diferentes sonidos por los diferentes grados de velocidad a la que giraban. Planteaba que si se conocía la masa y la velocidad de un objeto que giraba, se podría calcular su sonido fundamental. (Peralta, 2003).

Según Kepler, el movimiento de los planetas debe estar regido por relaciones numéricas sencillas, intuiciones que tras una laboriosa investigación plasmará en su famosa obra Harmonices Mundi, de 1619, una especie de Cantar de los Cantares matemático dedicado al gran armonista de la creación. (González, 2008)

La doctrina de la armonía de las esferas, ha tenido su influencia sobre la música sinfónica, la crítica musical ve memorias pitagóricas en algunas composiciones, como “La Creación” de Joseph Haydn, “Así habló Zaratustra” de Richard Strauss y “La Consagración de la Primavera” de Stravinski.

2. Composiciones Musicales con Bases Matemáticas

2.1. La Matemática en la Melodía

Para la creación de una pieza musical, en muchas ocasiones se utilizan elementos matemáticos, es decir, se utiliza una estructura basada en fundamentos matemáticos, en momentos, evidente y en otros no. Para obtener una melodía, es importante tener una secuencia de sonidos determinada, de tal manera, que no suene repetitivo y sea agradable al oído. Para esto, se utiliza un plano geométrico.

Dentro de los elementos matemáticos más utilizados para crear melodías armónicas, son las transformaciones isométricas; la traslación, la reflexión, la inversión y la transposición dentro de los más utilizados. Estas trasformaciones se encuentran presente en diversas composiciones populares, como las de The Beatles y en melodías como Guantanamera, Cielito Lindo, Las Mañanitas. También en composiciones clásicas, como Bach, Mozart, Haydn, Beethoven, entre otros. (Hammel, 1955)

A continuación, algunos ejemplos de cómo se pueden utilizar las trasformaciones isométricas. Ubicar un triángulo un plano con ejes coordenados, luego, poner notas musicales en los vértices del triángulo y posteriormente transferir a un pentagrama. La reflexión se utilizando tomando una figura original y reflejarla con respecto a un eje de simetría, en música se llama retrógrado. También se pueden utilizar curvas para realizar la reflexión, por ejemplo, tomando $y = f(x)$, donde su curva refleja puede ser $y = -f(x)$, con el *eje x* como eje de simetría.

2.2. Juego de Dados de Mozart

Un aspecto interesante entre la relación de música con las matemáticas, es la composición de obras musicales a partir de reglas y conceptos tales como la probabilidad; juegos de azar, modelos estadísticos, entre otros.

Mozart, el famoso compositor del siglo XVII, compuso la obra “Musikalisches Würfelspiel”, titulada en español “Juego de Dados Musical para escribir valses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición", un juego de dados, un generador de valses. La obra no contiene una partitura para un vals de 16 compases, más bien, tiene un sistema que, por azar, puede generar un número muy grande de valses diferentes de 16 compases cada uno.

Cada uno de los compases se construye lanzando dos dados y anotando la suma del resultado. Se tienen 11 resultados posibles, del 2 al 12. Mozart diseñó dos tablas, una para la primera parte del vals y otra para la segunda, cada parte del vals consta de 8 compases.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XVI	XVII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Figura 1: Muestra las tablas generadas por Mozart para componer a través del juego de dados.

Los números romanos sobre las columnas corresponden a los ocho compases de cada parte del vals, los números del 2 al 12 en las hileras corresponden la suma de los resultados, los números en la matriz corresponden a cada uno de los 176 compases que Mozart compuso. Hay $(2 \cdot 11)^{14}$ (750 trillones) variaciones de este vals, sólo una pequeña fracción ha sido escuchada. Tomando en cuenta la duración del vals, pasarían muchos miles de años si se quisiera escuchar todas las posibilidades.

2.3. Iannis Xenakis y la Música Estocástica

Iannis Xenakis fue un arquitecto, matemático y compositor, vivió con su familia en Grecia desde 1930 y luchó en el movimiento de resistencia de Grecia durante la Segunda Guerra Mundial, donde perdió un ojo. Trabajó con el arquitecto Le Corbusier durante doce años (1948-59). Fue exiliado de Grecia, tras ser encarcelado varias veces por actividades políticas, se trasladó a París y se nacionalizó francés. Desde los 30 años se dedicó de forma muy seria a la composición musical, recibiendo clases de Darius Milhaud y estudió composición en el conservatorio de París. En 1954 comenzó sus experimentos de *Música Estocástica* con la composición "Metástasis" y en 1955 escribió un artículo en el que expuso sus técnicas rigurosamente lógicas, donde el ejecutante, es dirigido por una notación especial para producir sonidos dados por una computadora programada por el mismo Xenakis.

Luego de establecer sus reglas mínimas de composición, recibió numerosos premios y reconocimientos y fundó el Equipo de Matemáticas y Autómatas Musicales en Francia y en la universidad de Indiana en los Estados Unidos. En su libro "Música Formal", describe sus métodos de composición y su filosofía, su tesis doctoral en letras y humanidades fue publicada con el título Arte/Ciencia.

Xenakis fue uno de los pocos compositores de su época que no se interesó en el *Serialismo*; un movimiento musical que desestimaba el uso de cualquier escala usada hasta entonces, ya que, proponía el uso de una serie de sonidos que normalmente utilizaba los doce sonidos que se encuentran en una octava, pero sin que se pudiera repetir una sola nota hasta no haber aparecido los doce sonidos, esta música llegó a ser extremadamente compleja. Los representantes más importantes de esta técnica son Arnold Schönberg, AntonWebern y Alban Berg, aunque tuvieron numerosos seguidores, Xenakis prefirió la formalización, es decir el uso de un modelo como base de una composición. En base a esto, surgieron una serie de complejas partituras de innegables capacidades comunicativas, como Achorripsis, en 1957.

Utilizó modelos matemáticos en sus composiciones así como en algunas de sus obras arquitectónicas, se centró sobre todo en el área de la probabilidad, considerando elementos como; distribución aleatoria de puntos en un plano, en su composición “Diamorphoses”, ley de Maxwell-Boltzmann, en su composición “Pithoprakta”, restricciones mínimas, en su composición “Achorripsis”, cadenas de Markov, en su composición “Analógicas” y distribución de Gauss. También utilizó teoría de juegos en “Duelo, Estrategia”, la teoría de grupos en “Nomos alpha” y teoría de conjuntos y álgebra booleana en “Henna, Eona”.

Xenakis, propuso el uso de una media estadística, esto lleva al desarrollo de su *música estocástica*. La música estocástica se caracteriza por masas de sonido, “nubes” o “galaxias”, donde el número de elementos es tan grande que la conducta de un elemento individual no puede ser determinada pero sí la del todo. Probablemente, la composición más famosa de Xenakis sea su primera pieza estocástica, “Metástasis” para orquesta de 61 músicos. Esta pieza está basada en el desplazamiento continuo de una línea recta. Este modelo se representa en la música como un *glissando continuo* (efecto sonoro, que consistente en pasar rápidamente de un sonido hasta otro más agudo o más grave, haciendo que se escuchen todos los sonidos intermedios posibles).

3. Vectores en un Espacio Sonoro Virtual

A continuación, se explica cómo posicionar el sonido en un espacio sonoro virtual, ya sea estéreo, multicanal o binaural, considerando sólo las definiciones más importantes para efecto de esta investigación.

Esta teoría fue tomada del curso introductorio impartido por Georg Holzmann, en el cual, afirma que las explicaciones se hacen desde el punto de vista del usuario, sin usar algoritmos matemáticos muy detallados.

3.1. Localización del Sonido

Se refiere a la capacidad de identificar la posición de un sonido determinado en un espacio virtual tridimensional (puede ser bidimensional, dejando nulo el eje z).

¿Cómo detectamos la localización de un sonido?

Debido a nuestras dos orejas, el sonido se retrasa en el oído más lejano de la fuente sonora, esto se llama "Diferencia de Tiempo Interaural" (Interaural Time Difference, ITD). La ITD es causada por la distancia que hay entre las orejas, por lo tanto, es distinta para cada persona debido a su anatomía.

Si una señal llega a la cabeza de una persona por el lado A, la señal debe recorrer más para llegar al lado B. Este aumento de recorrido de la onda, resulta en una diferencia de tiempo en la llegada del sonido a los oídos, lo cual es detectado por el sistema nervioso para ser analizado. Cuando una señal es producida en el plano horizontal, al ángulo en relación a la cabeza se le conoce como azimut. A 0°, la fuente de sonido se encuentra enfrente de la persona, a 90° se encuentra a la derecha y a 180° se encontrará detrás de ella.

La Diferencia de Tiempo Interaural es relevante para frecuencias inferiores a 1,5 kHz, ya que, las diferencias de fase (fracción del periodo transcurrido desde el instante correspondiente a lo que se tomó como referencia) son ambiguas para señales con longitudes de onda más pequeñas. Es importante tener en cuenta que cuando las longitudes de onda son más pequeñas que la cabeza, el oído no puede detectar una relación entre dos señales. Es problemático utilizar las ITD para la reproducción con altavoces, ya que depende, en gran medida, de la posición de la cabeza del oyente, por esto, se recomienda utilizar las ILD para los altavoces. La ITD, también reciben el nombre de Estereofonía del Tiempo de Llegada.

Por otro lado, la intensidad del sonido se amortigua en el oído lejano, esto se llama "Diferencia de Nivel Interaural" (Interaural Level Difference, ITD). La ILD genera la atenuación de los sonidos en el oído lejano y también, la disminución de la amplitud de sonido cuando hay más distancia con la fuente de sonido.

La Diferencia de Nivel Interaural es más relevante para las frecuencias por encima de 1,5 kHz, porque la desviación ocurre para longitudes de onda grandes en comparación con el tamaño de la cabeza humana. En este caso, no hay diferencias de fase y por lo tanto, la señal es mono-compatible, es decir, no se producen interferencias por razones de fase. La ILD, también recibe el nombre de Estereofonía de Intensidad.

La ITD y la ILD nos ayudan a localizar el azimut de la fuente de sonido (izquierda-derecha, no altura). El azimut es el ángulo formado entre la dirección de referencia y una línea recta entre el observador y la proyección de un punto de interés sobre el mismo plano del observador, generalmente la dirección de referencia es el norte o eje y positivo, en caso de posicionarlo en un plano cartesiano.

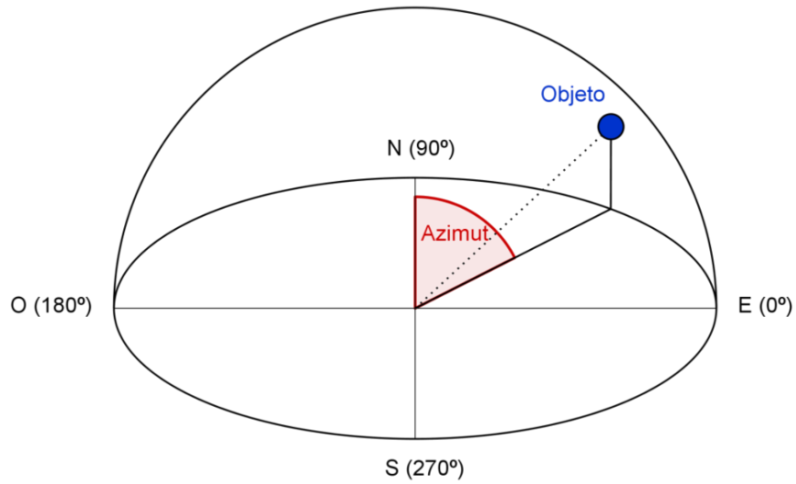


Figura 2: Muestra un ejemplo del Azimut

La detección de la elevación de la fuente de sonido, depende principalmente de los efectos de filtrado de las estructuras externas: la cabeza, los hombros, el torso y el oído externo, también llamado pinna. Estas influencias se pueden resumir como la "Función de Transferencia Relacionada con la Cabeza" (Head Related Transfer Function, HRTF), que es única para cada ser humano. Las señales de distancia no son tan fáciles de detectar. El filtrado de la cabeza, la amplitud del sonido y los ecos de las estructuras del entorno, son los factores más importantes para estimar la distancia del sonido, también es importante considerar los movimientos pequeños de la cabeza.

3.2. StereoPanning

Por lo general, podemos cambiar la posición de una fuente de sonido, mono alimentando los canales con la misma señal y ajustando las amplitudes relativas del canal, esto se denomina “Paneo Estéreo” (Stereo Panning).

La curva de diferencias de nivel necesaria para calcular un ángulo específico, está aproximada por la Ley de Blumlein. El estéreo Blumlein es una técnica estéreo, que usa dos micrófonos bidireccionales situados en el mismo punto y con un ángulo de 90º, de modo que los diafragmas de ambos micros coincidan sobre un eje imaginario, es importante considerar que produce información estéreo puramente relacionada con la intensidad.

Esta es la técnica más usada, debido a las múltiples ventajas que ofrece, como; entregar una reverberación (eco) uniforme, proporcionar una imagen definida, una localización definida y excelente sensación de profundidad. El principal inconveniente de la técnica de Blumlein es que sólo funciona bien en una habitación amplia y cuando no se presenten señales fuertes en los lados del par estéreo.

Esta técnica también se conoce como técnica estereofónica y se define con la siguiente fórmula:

$$sen(\varphi) = (G_L - G_R)/(G_L + G_R) \cdot sen(\varphi_0)$$

Donde,

G_L: ganacia para el canal izquierdo

G_R: ganancia para el canal derecho

φ: ángulo de la fuente de sonido virtual

φ_0: ángulo formado por el altavoz

Pero la Ley de Blumlein sólo es válida para frecuencias menores a 600Hz y cuando la cabeza de los oyentes apunta directamente hacia adelante.

Por otro lado, la ley tangente también es correcta para las ligeras rotaciones de la cabeza del oyente:

$$tan(\varphi) = (G_L - G_R)/(G_L + G_R) \cdot tan(\varphi_0)$$

Donde,

G_L: ganacia para el canal izquierdo

G_R: ganancia para el canal derecho

φ: ángulo de la fuente de sonido virtual

φ_0: ángulo formado por el altavoz

Implementación del paneo estéreo

Para implementar la ley tangente, necesitamos una ecuación más; en la posición central, ambas señales deben ser -3dB.

Para $\varphi_0 = 45º$, obtenemos los siguientes resultados:

$$G_L = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos(\varphi) + sen(\varphi))$$

$$G_R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos(\varphi) - sen(\varphi))$$

Con estas ecuaciones se preserva el volumen de la fuente de sonido virtual mientras se mueve su posición. Por el contrario, el desvanecimiento lineal entre los dos canales no preserva la sonoridad y determina un "agujero en el centro" del frente estéreo.

3.3. Introducción del Sonido Ambisonic

La idea fundamental del sonido Ambisonic, es reproducir todo el campo de sonido, en vez de la creación de fuentes de sonido fantasmas aisladas, como lo es el “Vector Base Amplitude Panning” (VBAP).

3.3.1. Codificación Ambisonic de Primer Orden

La codificación Ambisonic de primer orden, también llamada, formato tridimensional B (3D), se puede grabar con cuatro señales: W, X, Y y Z. en el caso del formato bidimensional (2D) no se necesita la señal Z. W es una señal tomada de un micrófono omnidireccional, un tipo de micrófono que capta los sonidos provenientes de todas las direcciones; X, Y y Z son señales tomadas de la figura de ocho micrófonos alineados con los ejes ortogonales:

$$W = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s$$

$$X = cos\,(\varphi) \cdot cos\,(\theta) \cdot s$$

$Y = sen\,(\varphi) \cdot cos\,(\theta) \cdot s$

$Z = sen\,(\theta) \cdot s$

Donde,

φ: azimut

θ: ángulo de elevación

s: señal mono sin codificar

3.3.2. Decodificación Ambisonic

La decodificación depende del diseño del altavoz. Cada altavoz recibe una suma ponderada de todos los canales, dependiendo de su propia posición. El número de altavoces, debe ser al menos el número de canales Ambisonic que se pueden calcular, a continuación las fórmulas para el cálculo:

$Caso\ 2D: nr = 2m + 1$

$Caso\ 3D: nr = (m + 1)^2$

Donde, m es el orden el Ambisonic, idealmente, los altavoces deben formar una disposición regular.

3.3.3. Ventajas y Desventajas de Ambisonic

Ventajas: La separación de la codificación y decodificación es una ventaja importante, la disposición del altavoz no tiene que ser sabido en el tiempo de codificación, formato de codificación Ambisonic es una poderosa representación del campo de sonido 3D, que permite manipulaciones fáciles, por ejemplo; rotación, reflejo, zoom, entre otros.

Desventaja: el punto dulce es pequeño, por lo tanto, se puede utilizar el orden más alto Ambisonic.

3.4. Ambisonic de Orden Superior

Los Ambisonics de Orden Superior (HOA), se basan en la descomposición de un campo sonoro en una serie de funciones armónicas esféricas, como W, X, Y, Z y B, pero aún más descompuesto. Esto conduce a varias ventajas, como son; mejor calidad de la localización, área más grande del punto dulce, límite de frecuencia superior extendido de la reproducción precisa del campo de sonido, por lo tanto, un mayor número de canales codificados y altavoces requeridos son necesarios. Los HOA también se puede utilizar para la reproducción binaural, a continuación, los altavoces ya no son más restricción.

Un problema con la HOA, es que no es fácil grabar armónicos esféricos de orden superior, porque no hay micrófonos con las características necesarias (las matrices de micrófonos serían posibles), pero es posible simplemente codificar una señal mono con la computadora.

Codificación Ambisonic de Segundo Orden

En la codificación Ambisonic de segundo orden, también se obtienen las señales W, X, Y y Z, como en el ejemplo anterior, por lo que las señales ambónicas de orden superior son compatibles con las de orden inferior y viceversa.

3.5. Binaural Orden Superior Ambisonic

En caso de no tiene tantos altavoces para reproducir una señal codificada ambisonic de orden superior, puede intentar representarlos a señales binaurales y luego escuchar con auriculares. La señal de entrada de cada fuente, se codifica en 3D de cuarto orden, por lo tanto, el sonido directo, las primeras, segundas reflexiones tempranas y la reverberación difusa, son calculadas por el simulador de ambiente y codificado ambisonic.

En una simulación donde la sala es un cubo, se pueden ajustar varios parámetros, como la longitud de la sala, ancho de la habitación, altura de la habitación, velocidad sónica, coeficiente de absorción de la pared para 3 bandas de frecuencia, frecuencia de corte de absorción de aire y un exponente de distancia llamado GUI. Con esto, es posible girar las señales codificadas ambisonic, que corresponden a las rotaciones de la cabeza, que tienen cierta influencia en nuestra percepción.

La exponente de distancia (GUI), permite mover una fuente en la habitación a su gusto y cambia la altura de la fuente (coordenada z). El círculo corresponde a nuestra cabeza, también se puede mover en la habitación y el desplazamiento gira la cabeza, arrastrando cambios de la altura de la misma.

4. Didáctica

4.1. La Didáctica y sus Inicios

La didáctica, se entiende como la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el fin de conseguir la formación intelectual del educando.

Para conocer e introducir un tema, es importante conocer la historia y surgimiento de sus bases teóricas y la didáctica de las matemáticas no escapa de esta afirmación, por esto, se seguirá la visión que entrega Michèle Artigues y Régine Douady sobre sus inicios.

Douady plantea que en Francia, la cuna de la didáctica, durante los años sesentas y setentas ocurrieron algunos cambios sociales. En aquel tiempo, los encargados de crear el curriculum en matemática eran los matemáticos más respetados de la época, quienes priorizaban la entrega de conceptos matemáticos importantes en cuanto a su estructura y de gran valor teórico-conceptual. Como dice Douady:

> "esta aproximación se basaba en una hipótesis: si los alumnos tenían este número reducido de herramientas potentes y generales, entonces ellos podrían aplicarlas en muchas situaciones diferentes. Por otra parte se pensaba que si había menos axiomas para enunciar, entonces era más fácil comprender" (Artigue, Douady, & Moreno, 1995).

Uno de los conceptos introducidos en la época fue el de relaciones de equivalencia (refleja, simétrica y transitiva). Dado que los profesores no estaban acostumbrados a enseñar este tipo de conceptos, surge la necesidad de capacitarlos y buscar nuevas estrategias pedagógicas de enseñanza y evaluación de estos contenidos. Por otro lado, los psicólogos de la escuela de Piaget tenían una gran influencia con sus investigaciones sobre la sicología cognitiva, el aprendizaje y sus teorías constructivistas.

Es por esto, que cada vez se hacía más evidente la necesidad de estudiar los problemas que generaba la enseñanza del saber matemático, considerando la interacción entre el profesor, el estudiante y el saber u objeto matemático.

Debido a que el Ministerio de Educación Nacional decide apoyar a los profesores para que aprendieran los nuevos conocimientos matemáticos y los investigadores buscaban encontrar relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje para mejorar la relación didáctica, surgen los Institutos de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas, en adelante los IREM (Artigue et al., 1995).

Los IREM tenían dos características fundamentales, la primera fue la posibilidad de trabajar en conjunto entre personas con distinta formación, es decir, personas que se desempeñaban en diversas áreas laborales, como por ejemplo, profesores, matemáticos, físicos, inspectores, sociólogos, psicólogos, entre otros. La segunda característica fue la creación de una red nacional entre los IREM, con la finalidad de participar en la formación de los profesores, realizar investigación sobre la enseñanza de las matemáticas y crear material sobre ésta para los docentes.

Posteriormente, Brousseau crea la escuela Michelet en Burdeos, la que Douady define como “un laboratorio dentro de la práctica misma”, ya que, estaba diseñada para el estudio de fenómenos didácticos.

Con el paso del tiempo, el Ministerio de Educación Nacional decide que los profesores ya están capacitados para abordar la enseñanza de la matemática por su cuenta, por lo que dejan de recibir el apoyo ministerial, provocando incertidumbre en los profesores, ya que no sabían cómo enseñar los contenidos, ni tampoco sabían que tanta libertad tendría el estudiante con respeto a lo que aparecía en los libros. Esto provocó que muchos de los profesores de la época se basaran únicamente en lo que aparecía en los textos, generando una sensación de mecanismo por parte de los estudiantes, limitando la comprensión de los contenidos matemáticos.

Algunos investigadores de la didáctica, comenzaron a reflexionar y se generan nuevas preguntas de investigación, Douady define por ejemplo, el medio en el que los estudiantes debían desenvolverse para enfrentar sus problemáticas, la creación de un saber común en la clase que sea útil para otras áreas del conocimiento y se transforme en un saber cultural, los errores comunes en clase y la contraposición entre las expectativas del profesor con la realidad observada.

En la década de los 80, la didáctica estaba en el centro de la investigación como campo científico, ya que, los IREM preparan las clases conjuntamente, las cuales tienen una intencionalidad de aprendizaje clara y se hacen análisis de las observaciones es éstas en conjunto, generando una nueva toma de decisiones. De aquí, nacen las nuevas metodologías de investigación didáctica, una de ellas llamada *Ingeniería Didáctica*, centrada principalmente en las investigaciones realizadas por G. Brousseau, M. Artigues, R. Douady, M.R. Perrin y J. Robinet (Artigue et al., 1995).

4.2. Registros de Representación Semióticas

La matemática es un área de estudio abstracta y no dispone de elementos perceptibles como otras áreas del conocimiento, en las cuales, se puede observar de manera concreta su objeto de estudio. Por esto, que se ha elaborado un sistema de representaciones del objeto matemático y no existe una forma única de representarlo.

4.2.1. Inicio de los Registros de Representación

En este contexto, a fines del siglo XX, Raymond Duval, comienza a estudiar los procesos cognitivos del pensamiento matemático, debido a la investigación didáctica que existía en la época, el estudio de errores conceptuales, el aprendizaje colaborativo y sus producciones y el estudio de las capacidades cognitivas que permiten aprender matemática, infiriendo que existe un distanciamiento de las formas del pensamiento matemático y las formas de pensar fueras de las matemáticas (Duval, 2006). Ante esto, Duval desarrolla la teoría de las representaciones semióticas.

Por tanto, un registro, se entiende como la representación un objeto matemático, para poder realizar la actividad matemática, por ejemplo, Duval plantea que *"los números naturales se pueden representar con material como cerillas (IIIII IIIII), con puntos, con una representación poligonal y también, con el sistema de notación decimal, que tiene un signo algo extraño, el cero".* (Duval, 2006)

Estos registros son llamados *semióticos*, donde el estudiante debe que ser capaz de reconocer un objeto matemático, independiente del registro que se utilice para representarlo, además, de ser capaz de utilizar una representación semiótica adecuada a la actividad matemática propuesta.

Por otro lado, Charles Morris (1985), define la semiótica como la ciencia de la semiosis, acontecimiento o proceso de signo, distinguiendo tres partes en ella, la sintaxis; que es el estudio de las relaciones de coherencia entre los signos, la semántica, que estudia la relación entre el signo y la realidad, las condiciones necesarias para que un signo pueda aplicarse en un objeto y las reglas que aseguran una significación exacta y la tercera es la pragmática, que estudia situaciones comunicativas, el conocimiento compartido por los hablando y las relaciones interpersonales.

Según Duval (2006), la actividad matemática es llevada a cabo necesariamente en un "contexto de representación". Los objetos que son estudiados por la matemática, no se encuentran disponibles en el mundo tangible para ser manipulados y explorados, y la única forma para acceder a ellos es utilizando algún registro de representación semiótico. En otras palabras, su naturaleza abstracta implica que toda actividad matemática, así como su aprendizaje, está mediado por las representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Por ejemplo, el acceso a los números sólo es posible utilizando algún sistema que permita designarlo; los números naturales pueden ser representados por materiales concretos como palitos u otro recurso contable, o por figuras poligonales u ordenamiento de puntos, o bien, a través de su representación dada por un sistema decimal de numeración (Duval, 2006).

Duval (2006), plantea que es importante desarrollar la habilidad de transformar las representaciones semióticas, acordes a la actividad matemática que se propone y que las habilidades dependerán del sistema semiótico en que las representaciones se presentan, por otra parte, la actividad matemática, requiere que se escoja una representación adecuada para poder ejecutarla, existiendo una coordinación interna del registro.

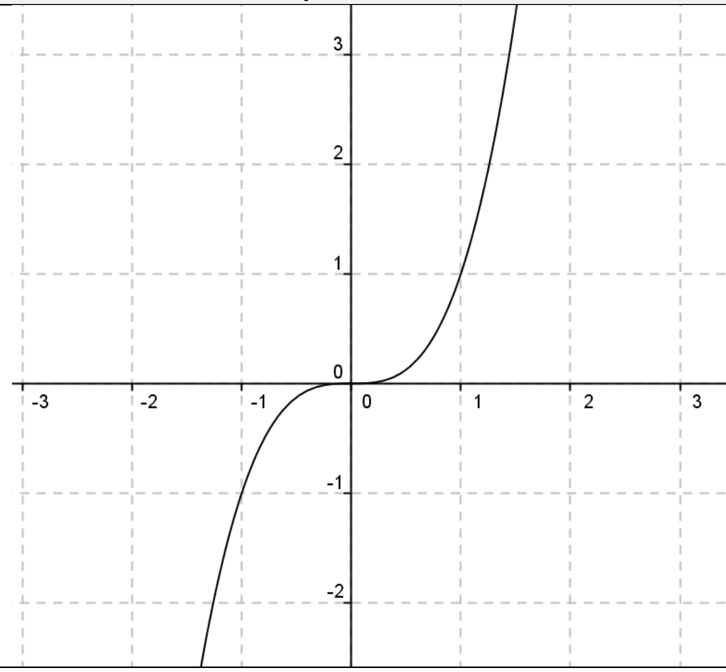
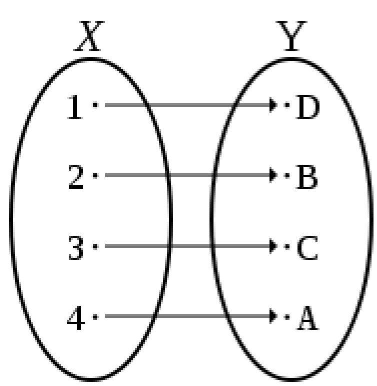
4.2.2. Tipos de Representaciones y sus Características

Las transformaciones pueden ser internas o externas, la primera, llamada *tratamiento* y requiere que se produzca una serie de formas dentro de un mismo sistema semiótico de representación, mientras que la segunda, llamada *conversión*, requiere realizar un cambio en el sistema semiótico. Es decir, el *tratamiento* es una transformación que ocurre dentro del mismo registro semiótico, y la *conversión*, por otra parte, es la transformación del objeto matemático de un registro semiótico a otro diferente. La mayoría de los estudiantes se detiene en el segundo umbral de conversión de representación, no siendo capaces de reconocer el mismo objeto matemático a través de dos representaciones diferentes (Duval, 2006).

Así, en el proceso de enseñanza de la matemática, es necesario ofrecer a los alumnos diferentes instancias en las cuales se tomen decisiones sobre cuál es el mejor registro para resolver un determinado problema y, para ello, deben manejar las reglas de tratamiento de cada registro y ser capaces de ir y venir de un registro semiótico a otro.

A continuación se muestran un ejemplo de los distintos tipos de registros, tomando solo un objeto matemático.

Tabla 2: Muestra los distintos tipos de registros de representación.

Nombre del Registro	Representación
Lenguaje Geométrico	
Lenguaje Natural	Sea la función f, una función que a cada número real le asigna su cubo.
Lenguaje Algebraico	$Sea\ f(x): R \rightarrow R, tal\ que\ f(x) = x^3$
Lenguaje Figural	 Con $A = 64, B = 8, C = 27\ y\ D = 1$

Para poder realizar una conversión entre registros, se deben realizar una serie de preguntas que permitan identificar el objeto matemático, a este proceso de identificación se le llama codificación. Permitiendo generar un anclaje, tanto en los diferentes sistemas de registro, como también dentro del mismo.

El siguiente esquema, muestra los procesos cognitivos necesarios para relacionar el tratamiento con la conversión de representaciones semióticas.

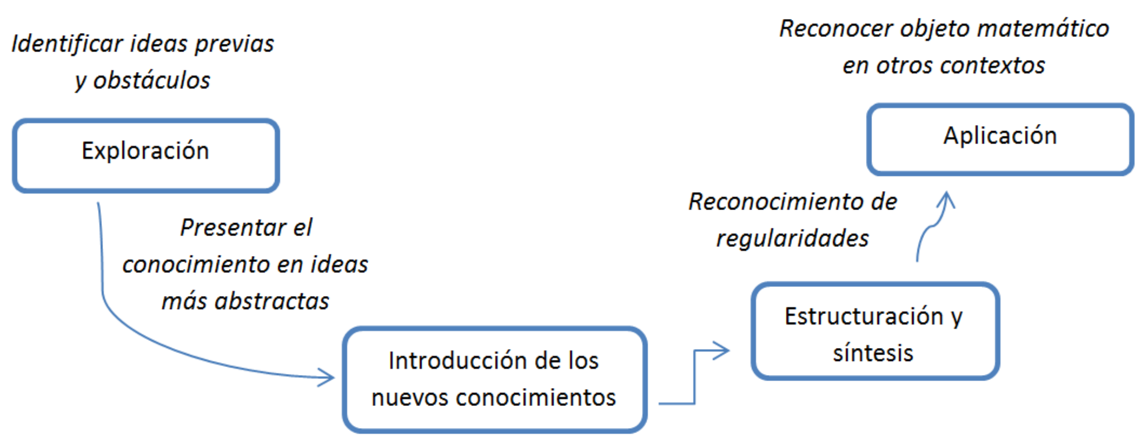


Figura 3: Muestra los procesos cognitivos para relacionar el tratamiento y la conversión.

4.3. La ingeniería Didáctica

4.3.1. Definición

La Ingeniería Didáctica se considera una metodología de investigación, que está ubicada en el estudio de la enseñanza de las matemáticas, la cual, genera y produce situaciones de aprendizaje en el aula. Se fundamenta teóricamente en la didáctica de la matemática francesa, apoyándose en las teorías de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau y la Transposición Didáctica de Yves Chevallard. Ambas teorías de fundamentan en la Didáctica de la Matemática entendiéndola como el estudio y análisis de los procesos e interacciones que existen entre la triada *saber – estudiante – profesor (sistema educativo)*, con el fin de perfeccionar aquellos aspectos que actúan en el dialogo constante entre el saber y el estudiante.

Es importante destacar que la ingeniería didacta sólo cobra sentido cuando se enmarca en el área específica del conocimiento que abarca la ciencia, es decir, Química, Física y Biología, además de las Matemática (es sabido que se han hecho investigaciones utilizando esta metodología en el resto de las ciencias). Su nombre se origina de la analogía que se puede hacer con la labor de un ingeniero, que según Artigue (1998):

> *"Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de lo que la ciencia no quiere o no puede hacerse caso."*

Michelle Artigue define la ingeniería didáctica como un proceso que integra y propone la interacción entre tres dimensiones, la Epistemológica, la Didáctica y la Cognitiva.

La dimensión *Epistemológica* se refiere al saber teórico que fundamenta la investigación La dimensión *Didáctica* se refiere al sistema de enseñanza y aprendizaje en el que el estudiante está inmerso. La dimensión *Cognitiva* se refiere a la concepción que tiene el estudiante sobre el saber en funcionamiento y los cocimientos previos que posee cuando se realiza una investigación.

4.3.2. Fases

En la Ingeniería Didáctica, la validación de los procesos didácticos se realiza principalmente de manera interna, contraponiendo la predicción de resultados llamada análisis a priori, con el análisis de los resultados después de su experimentación, llamado análisis a posteriori.

4.3.2.1. Fase 1: Análisis Preliminar

Los análisis preliminares consisten en una revisión bibliográfica y teórica del objeto en estudio, es decir, un análisis epistemológico de los contenidos contemplados, tomando en consideración los conocimientos previos que existen en el área, las ideas que tienen las personas de la muestra y el contexto sobre el cual se realizará la experiencia. Sobre esa teoría se levantadas las hipótesis y se recolecta la información suficiente para comenzar la producción de la propuesta didáctica.

4.3.2.2. Fase 2: Concepción y Análisis a Priori

Esta fase se compone por dos partes, una descriptiva y otra predictiva. La descriptiva, se relaciona con el desarrollo de la secuencia didáctica y los recursos que permiten alcanzar los aprendizajes de ciertos contenidos, además de enfocarse en el desarrollo de habilidades matemáticas. La predictiva, tiene como finalidad prever comportamientos de los estudiantes y profesores, para manejar la intencionalidad de la enseñanza. En esta fase, se actúa sobre dos tipos de variables, definidas como *variables de comando*, las que el investigador las asume como relevantes para el fenómeno estudiado. Según Artigue (1992), las variables de comando se dividen en; *variables macro-didácticas o globales*, que se refieren a la organización global de la ingeniería y en *variables micro-didácticas o locales*, que representa la organización local de la ingeniería, es decir, a la organización de cada una de las tareas y acciones que componen la secuencia didáctica.

En esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Artigue distingue dos tipos de variables de comando:

4.3.2.3. Fase 3: Experimentación

En esta fase, se aplica la producción didáctica en una determinada muestra de la población escogida. La experimentación contempla los siguientes aspectos; se deben explicitar y explicar los objetivos y condiciones de la investigación a todos los participantes, establecer el contrato didáctico, es decir, un mutuo acuerdo para que se inicie el proceso, aplicar los instrumentos de investigación y registrar las observaciones que se realizaron durante la experimentación.

4.3.2.4. Fase 4: Análisis a Posteriori y Validación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica, en la cual, se realiza el análisis de los datos recolectados durante la fase de experimentación y otros datos obtenidos previamente, utilizando otras metodologías, como ejemplo, encuestas, test, entrevistas, entre otros. Una vez finalizado el tratamiento de los datos, se realiza el proceso de validación, que cosiste en la confrontación del análisis a priori y del análisis a posteriori, con la finalidad de objetar o validar las hipótesis de la investigación.

5. Definiciones y Conceptos Musicales

5.1. Parámetros Tradicionales del Sonido

5.1.1. Altura

Se refiere al número de vibraciones por segundo con que oscila el sonido en un medio determinado, también llamada *frecuencia*. Siendo el largo del medio sonoro, inversamente proporcional al número de vibraciones. El oído humano es capaz de percibir entre 16 y 18.000 vibraciones por segundo, fuera de este rango dejamos de oír. Se mide en Hertzios.

5.1.2. Timbre

Se refiere al color del sonido, describe que tipo de objeto está emitiendo un determinado sonido, por ejemplo, si un violín en conjunto con una trompeta emiten una nota DO, es completamente distinguible el sonido que emitió cada uno, a eso se le llama timbre, es decir, el sonido particular emitido por cada instrumento. Esta cualidad, en términos físicos, se llama forma de onda.

5.1.3. Intensidad

Cada una de las notas y sonidos que conocemos se pueden oír con más o menos energía, con mayor o menor volumen, precisamente a esto se le llama intensidad, es decir, la fuerza o volumen del sonido. A mayor amplitud de onda, más intenso es el sonido. Se mide en decibeles.

5.1.4. Duración

Se refiere a la cantidad de tiempo que permanece un sonido en forma audible. Un sonidos puede ser largo o breve, cuanto más larga sea la onda, mayor duración tendrá el sonido. Se mide en segundos.

5.2. Dominios de la Música por Competencias

En Francia[3], el año 2008, realizaron una reestructuración de los contenidos en la educación musical, ordenando, según el currículum por competencias, los dominios de la música, quedando clasificados en siete categorías, a continuación, una breve descripción de cada una.

5.2.1. Dominio del Gesto y la Voz

En este dominio, el estudiante aprende a movilizar su cuerpo para expresarse con componentes y funcionamiento de la voz (respiración, emisión, resonancia, cuerpo), sensaciones que se relacionan y también se exige una postura corporal.

Se utiliza la *voz hablada*; voces, gritos, palabras, murmullos, llantos, voz no hablada, susurro, silbidos, parloteo y se juega con los parámetros del sonido (altura, timbre, duración, densidad, dinámica, espacio, dispersión).

También, la *voz cantada*, se enfoca en la afinación, modulación, impostación de la voz, dominio de la altura, dinámica, timbre de contextos polifónicos; voz principal, secundaria, desarrollo de la tesitura, coloratura, timbre homogéneo al grupo, articulación, expresión en función de una intensión, fraseo y responsabilidad vocal frente al grupo.

El *Gesto Instrumental Complementario*; se refiere a vivir internamente la pulsación y el ritmo de la música, dominar el movimiento en función de la intensión, ser idóneo y exigente para la producción de una obra, adaptarse al rol y juego dentro de un proyecto musical, trabajar de manera autónoma, complementando el musical.

---

[3] Programa de Educación Nacional de Francia, 2008, Traducido por Tomás Thayer Morel http://www.musico.cl/Domi_Edu_Mus.html

5.2.2. Dominio de la Dinámica

Las características de este dominio, se basan en el discernimiento de ruido y sonido, la intensidad del sonido e intensidad del gesto, los diferentes matices (pianissimo, piano, mezzopiano, mezzoforte, forte y fortissimo), la progresión de intensidad crescendo a decrescendo y viceversa, el acento estable o contraste, la acentuación, la diversidad de modos de tocar un instrumento, la densidad sonora de una o varias fuentes sonoras y la música acústica o amplificada.

5.2.3. Dominio del Timbre y el Espacio

Este dominio es el más importante para efectos de esta investigación, ya que se basa en el timbre, mediante el sonido particular emitido por un objeto y en el espacio, con la cercanía o lejanía de un sonido, según la intensidad de este.

Las características de este dominio, se basan en los siguientes temas:

La clasificación sonora de ruidos, músicas, sonidos, frecuencias, vibraciones, el registro de los sonidos y la altura; la envolvente del sonido (ataque, sostenimiento y caída); en la riqueza armónica o espectro armónico; en la densidad sonora (desde un solista a la formación en coro, orquesta o música mixta); en la cualidad de la textura musical, monódica, polifónica, contrapuntística, armónica, melodía acompañada; en la riqueza timbrística y reconocimiento de los instrumentos folklóricos de la orquesta clásica y de otras culturas, en la discriminación de sonidos naturales, producidos por el hombre o sintéticos y en la distinción de instrumentos virtuales o de síntesis análoga o virtual.

5.2.4. Dominio del Tiempo y el Ritmo

Este dominio, se basa en el tempo sin Pulso (Alap Hindú), en la pulsación, en el tempo, en la duración y resolución rítmica, en los tiempos fuertes y débiles, en los tempos binarios y ternarios y en las fórmulas rítmicas simples y complejas.

5.2.5. Dominio de lo Melódico y lo Armónico

El quinto dominio, se centra en las siguientes habilidades: comprender lo sucesivo, es decir, una serie de sonidos conjuntos y también disconjuntos, la repetición de un motivo simple, rítmico o melódico, comprender las características suspensivas o conclusivas, lo simultáneo, es decir, acordes, acordes con notas agregadas y clusters, entender los planos sonoros y funciones musicales, identificar la polifonía, polirítmia y heterfonía, trabajar con elementos que se mezclan, modulan o combinan, como los ostinatos, las bases, la paterna, las variaciones de un motivo y la imitación, las funciones armónicas y melódicas acompañadas, la organización del lenguaje de manera sucesiva o simultánea, mediante un trabajo temático. También se trabajan las tensiones armónicas, cadencias, organización tonal, organización modal, organización atonal, superposiciones diversas y las puntuaciones de diversas naturalezas.

5.2.6. Dominio de la Forma

El domino de la forma se preocupa de las señales, es decir, la alternancia de lo continuo y de lo interrumpido o aleatorio, de los cambios por contraste de diferentes naturalezas, como por ejemplo, melódicas, rítmicas, armónicas, dinámicas y de timbre, de las progresiones, por grados de las alturas, de la dinámica, del timbre, del espacio, entre otros. Pero también, de la organización del tiempo de la obra, considerando los siguientes aspectos:

La instalación de un orden de partes, temas y motivos; instalar relaciones idénticas, diferentes ressemblance y diferentes contrastes; organizar el tratamiento, con la repetición, la citación, la variación y el desarrollo, los elementos que se combinan para construir la forma musical, la adición, estrófica o el refrán, se tienen también por repetición, el ABA y rondo y por variación de bajo ostinato, por el tema y las funciones armónicas. Las combinaciones aleatorias, y de improvisación y finalmente, los argumentos extra musicales o programáticos.

5.2.7. Dominio de los Estilos Musicales

El último dominio consiste en la identificación de diversos estilos musicales y las características de cada uno, por esto, se centra en:

Los gestos recurrentes, como: comparar una música de otra, memorizar constantes musicales, identificar evoluciones y cambios, relacionar la música de origen social con la música de origen geográfico. Considera también, estilos que surgen de su función, de los usos, de su lugar en la sociedad, del contexto.

También en distinguir, la música popular, ya sea música electrónica popular, electroacústica (generación de composición con medios electrónicos), campos sonoro-musicales o mixtos, interactivos, aleatorios, ambientales de drone que surgen de la síntesis de sonido digital y concreto (sample), de la música erudita o docta. La música sacra de la música profana, la música circunstancial: fiestas, ceremonias, homenajes, conmemoraciones, la música de acompañamiento de la imagen: cine, audiovisual, multimedia, la música de consumo, publicidad en todas sus formas, la música pura, la música al servicio del movimiento, danza, ballet, la música en diferentes arreglos o interpretaciones y la música narrativa o descriptiva.

Y por último, distinguir la ubicación geográfica de la música, como: la música occidental de la música no occidental, la música de las regiones de Chile y de todas las naciones, la música de diferentes estilos de los diferentes continentes (Asia, África, India, Australia, entre otros), la música de Collage, uso de mezclas o yuxtaposiciones musicales y música de mestizaje.

5.3. El sonido Proveniente de Fuentes Digitales

5.3.1. El Sonido Electroacústico

Para hablar de sonido electroacústico, es inherente hablar de la electroacústica. Esta se refiere a una parte de la acústica, que se preocupa de estudiar, analizar, y diseñar dispositivos que conviertan la energía eléctrica en sonido y viceversa, como micrófonos, altavoces, audífonos, entre otros. Las características del sonido que se modifican al utilizar procesadores de audio son variadas, como: amplitud, rango dinámico, respuesta en frecuencia, respuesta en el tiempo, timbre y otros. El procesamiento se lleva a cabo de manera electrónica, utilizando la tecnología de semiconductores y la tecnología digital.

El sonido electroacústico tiene su origen en la fusión de las dos tendencias; la música electrónica, con sonidos generados electrónicamente (en 1951, se estrenó el primer computador en tocar música electrónica) y la música concreta, generada a partir de la manipulación de sonidos concretos grabados en cinta magnética. A partir de esta fusión, se genera para música electroacústica.

5.3.2. Lenguaje MIDI

En 1980, un grupo de músicos y fabricantes, acordaron estandarizar una interfaz para que a través de ella, diferentes instrumentos pudieran comunicarse en conjunto con el ordenador principal. El estándar se denominó MIDI (Musical Instrument Digital Interface). En agosto de 1983, la especificación 1.0 de MIDI fue finalizada.

La llegada de la tecnología MIDI, permitió que con el simple acto de presionar una tecla, se pudieran activar todos y cada uno de los dispositivos del estudio remotamente y de forma sincronizada, respondiendo cada dispositivo de acuerdo a las condiciones prefijadas por el compositor, como controlar una rueda, mover un pedal o dar una orden en un micro ordenador.

Miller Puckette, matemático, programador y profesor de música, desarrolló un software para el procesamiento gráfico de señal de 4X llamado Max, que posteriormente sería incorporado a Macintosh, con el fin de controlar el MIDI en tiempo real, haciendo que la composición algorítmica estuviera disponible para cualquier compositor que tuviera un mínimo conocimiento de programación informática.

5.3.3. Pure Data

Es un lenguaje de programación gráfico, desarrollado por Miller Puckette durante la década de los 90, para la creación de música por ordenador interactiva y obras multimedia. Aunque

Puckette es el principal autor del software, Pd es un proyecto de código abierto y tiene una gran base de desarrolladores trabajando en nuevas extensiones al programa, además de ser gratutito.

Está publicado bajo una licencia GNU, que permite, entre otras posibilidades, la construcción de prototipos de experimentación sonora y musical, para la realización de experiencias auditivas interactivas, basadas en control de variables en tiempo real, así también, realizar síntesis sonora y procesamiento de señales digitales de audio y video. Es una licencia similar a la licencia BSD. Pd es muy parecido en alcance y diseño al programa original de Puckette, "Max" y es, hasta cierto punto, interoperable con Max/MSP, el sucesor comercial del lenguaje Max.

6. Definiciones y Conceptos Matemáticos

Para comenzar, es importante aclarar el enfoque que se utilizará sobre los conceptos matemáticos, por lo tanto, a continuación se definen los elementos más relevantes.

6.1. Distancia

La distancia se entenderá como la longitud del segmento de recta que une dos puntos del espacio euclídeo. Formalmente, podemos decir que la distancia es una función o aplicación matemática que cumple con ciertas condiciones:

- *No negativa:* la distancia entre dos puntos siempre es mayor que cero, es decir, positiva, $d(A, B) \geq 0, con\ A\ y\ B\ números\ reales$.
- *Simétrica:* la distancia desde un punto A a un punto B es igual a la distancia desde el punto B al punto A, $d(A, B) = d(B, A), con\ A\ y\ B\ números\ reales$.
- *Desigualdad triangular:* la distancia entre un punto A y un punto B siempre será menor o igual a la distancia desde A hasta C sumado a la distancia de B hasta C, siendo C un tercer punto en el plano, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C), con\ A, B\ y\ C\ números\ reales$.
- *Distancia cero:* la distancia entre un punto A y si mismo es cero, $d(A, A) = 0$. También se puede considerar que si la distancia entre dos puntos es cero, implica que los puntos son iguales. Si $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$.

Figura 4: Muestra gráficamente la distancia entre dos puntos.

6.2. Grado Sexagesimal

Un grado sexagesimal es una unidad de medida que se utiliza para medir ángulos. Se define como el ángulo central que se forma al dividir la circunferencia en 360 partes iguales y su longitud es 1/360 de la circunferencia. Una circunferencia mide exactamente 360° (trescientos sesenta grados).

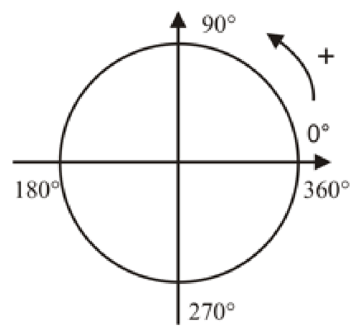


Figura 5: Muestra la medida de los ángulos sexagesimales

6.3. Radián

El radian es una unidad de medida que se utiliza para medir ángulos, registrada en el Sistema Internacional de Unidades. Se define como el ángulo central que se forma en una circunferencia y su longitud es un arco que tiene igual medida que su radio. Una circunferencia mide exactamente $2\pi\ rad$ (dos pi radian).

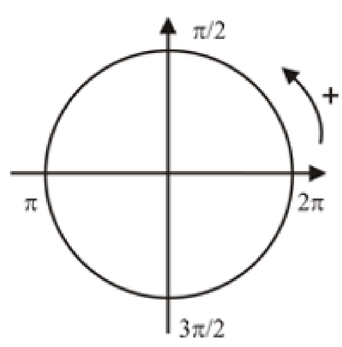


Figura 6: Muestra la medida de los ángulos en radianes.

Tabla 3: Equivalencia entre grados sexagesimales y radianes.

Grado Sexagesimal	Radián
1°	$0{,}01\pi\ rad$
30°	$1/6\pi\ rad$
45°	$1/4\pi\ rad$
57,30°	$1\ rad$
90°	$1/2\pi\ rad$

Grado Sexagesimal	Radián
114,59	$2\ rad$
180°	$\pi\ rad$
171,89°	$3\ rad$
270°	$3/2\pi\ rad$
360°	$2\pi\ rad$

6.4. Ángulo

Un ángulo es una magnitud física, que se define como la razón entre la longitud del arco de circunferencia trazado entre dos semirrectas y la distancia al centro o vértice de la intersección de éstas. También se puede entender como una parte de un plano comprendida entre dos semirrectas que tiene un mismo punto de origen. Se puede medir en grados sexagesimales, en radianes, entre otros.

6.5. Plano

El plano es una superficie infinita de dos dimensiones, se determina por; tres puntos no coloniales, una recta y un punto exterior a ella, dos rectas paralelas o dos rectas que se cortan.

6.6. Plano Cartesiano

Para formar este plano se consideran dos rectas de números reales, las que se interceptan perpendicularmente en un punto **O** llamado ***origen***. Estas rectas se conocen con el nombre de ejes coordenados, uno llamado *eje x* o *eje de las abscisas* y el otro llamado *eje y* o *eje de las ordenadas*. Cada uno de los ejes está dividido en una parte positiva y una negativa, determinadas por el origen. Los valores que están sobre el *eje x* y a la izquierda de **O** son negativos y aquellos que están a la derecha de **O** son valores positivos. Los valores que están sobre el *eje y* y arriba de **O** son positivos y aquellos que están debajo de **O** son negativos. El sistema descrito se denomina sistema coordenado rectangular, plano rectangular o ***plano cartesiano.***

Las intercepciones de los ejes coordenados generan cuatro planos llamados cuadrantes. Los cuadrantes se ordenan según la combinación positiva y negativa de los ejes.

Tabla 4: Signos del plano cartesiano según el cuadrante

Eje x	**Eje y**	**Cuadrante**
Positivo	Positivo	I
Negativo	Positivo	II
Negativo	Negativo	III
Positivo	Negativo	IV

Otra forma de recordar la distribución de los cuadrantes es utilizando sentido anti horario, comenzando desde el eje x positivo.

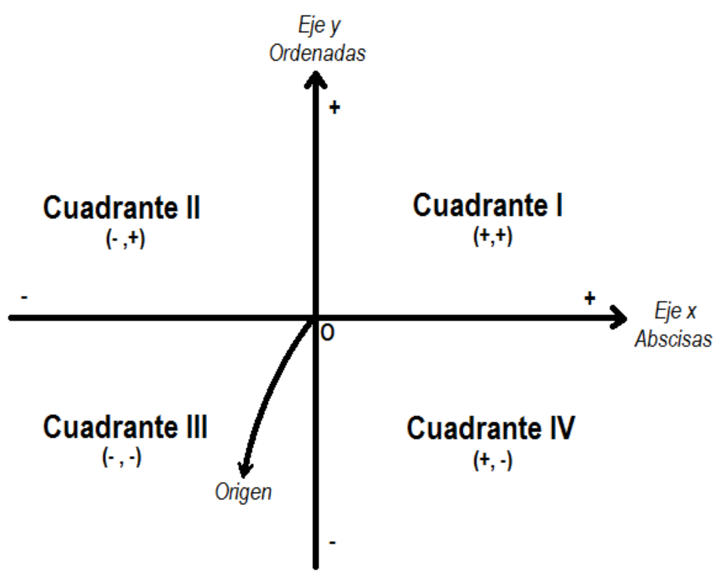


Figura 7: Muestra el plano cartesiano y los signos de sus coordenadas.

6.7. Coordenada Rectangular o Cartesiana

Para ubicar puntos en el plano cartesiano, se utiliza un sistema de coordenadas llamado rectangular o cartesiano, el cual determina un ***par ordenado***. Si P es un punto situado en el plano cartesiano, diremos que P tiene coordenadas (x, y), donde x corresponde al valor que alcanza en las abscisas (distancia de P al origen) e y corresponde al valor que alcanza en las ordenadas (distancia de P al origen).

6.8. Sistema de Coordenadas Polares

El plano polar es un sistema coordenado, que se compone de un punto llamado ***polo*** y un rayo o semirrecta con vértice en el polo, llamado ***eje polar***. Para ubicar un punto P en el sistema de coordenadas polares o plano polar, se utiliza un par ordenado llamado ***coordenada polar***.

6.9. Coordenada Polar

Si P es un punto ubicado en el sistema de coordenadas polares, entonces P se representa como un par ordenado de números $(r, \theta), con\ r > 0$, donde r representa la distancia del punto P hasta el polo y θes un ángulo (en grados o radianes) formado por el eje polar y un rayo que comienza del polo y pasa por el punto P.

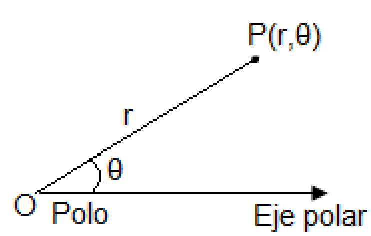


Figura 8: Muestra la forma y grafica de una coordenada polar.

Tabla 6: Comparación entre el plano cartesiano y el plano polar.

Plano Cartesiano	Plano Polar
Origen	Polo
Eje de las abscisas (eje x)	Eje polar
Coordenada cartesiana (x, y)	Coordenada polar (r, θ)

6.10. Vector

En palabras simples, un vector es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. Generalmente, se representa con un rayo o una semirrecta, donde la longitud de este rayo corresponde a la magnitud y la punta corresponde a la dirección. En geometría, se utilizan los vectores con el nombre de segmento de recta dirigido, el cual tiene un punto inicial y una dirección establecida.

Sea v un vector, su magnitud se representa por $\|v\|$ y posee las propiedades que se presentan a continuación:

- La magnitud o longitud del vector es siempre mayor o igual a cero, $\|v\| \geq 0$.
- La magnitud de un vector es igual a la magnitud del vector inverso, $\|v\| = \|-v\|$.
- La magnitud de un vector es cero, siempre que el vector sea cero, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- La magnitud de un vector multiplicado por el valor absoluto de un escalar es igual a calcular un vector multiplicado por un escalar y luego calcular su magnitud, $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

Un vector se puede representar en el plano cartesiano como $\vec{v} = \langle a, b \rangle$, cuyo punto inicial se encuentra en el origen y su punto terminal P tiene coordenadas (a, b), o también como $\vec{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$, en caso de que no esté en el origen con P_1 de coordenadas (x_1, y_1) como punto inicial y P_2 de coordenadas (x_2, y_2) como punto final.

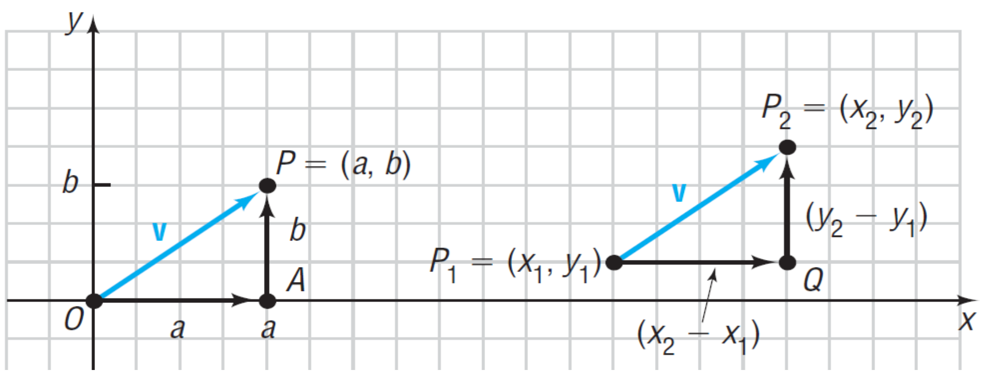


Figura 9: Muestra un vector en el origen y su traslación.

Un vector se puede representar en el plano polar como $\vec{v} = (r, \theta)$, donde r es la magnitud del vector y θ es el ángulo que forma el rayo con el eje polar.

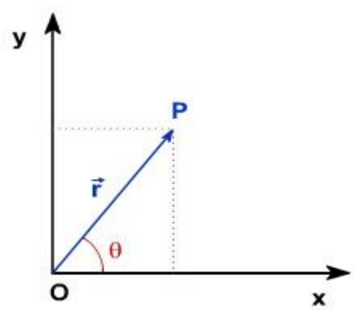


Figura 10: Muestra un vector representado en su forma polar.

Tabla 7: Transformación de coordenada cartesiana a coordenada polar y viceversa.

Forma polar a cartesiana	Forma cartesiana a polar
$x = r \cdot \cos\theta$ $y = r \cdot sen\,\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = tan^{-1}(y/x)$
Quedando $(x, y) = (r\ \cos\theta, r\ sen\ \theta)$	Quedando $(r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, tan^{-1}(y/x))$

CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

1. La Ingeniería Didáctica como Metodología de Investigación

En base a los objetivos y finalidades de esta investigación, se buscó una metodología que ajustara el proceso de producción y aplicación de las actividades didácticas, además de un método que permitiera validarlos como herramientas didácticas, es decir, que aceptara el sonido como una nueva representación de un objeto matemático, en este caso, vectores bidimensionales en un espacio virtual.

A partir de los años 80 y hasta nuestros días, la ingeniería didáctica se ha vuelto uno de los métodos privilegiados por los didactas franceses, ya que pueden organizar la confrontación de sus construcciones teóricas con la práctica de la misma. La Ingeniería Didáctica posibilita una sistematización metodológica para realizar investigación, tomando principal atención en la relación de dependencia entre la teoría y la práctica. Dentro de esta relación, es fundamental tener en consideración el componente experimental, reflejado en la práctica pedagógica, así como toda experiencia o innovación debe ser sometida a un análisis racional, basado en conocimiento didáctico preestablecido (Artigue, 1992, Pais, 2002).

La investigación comienza por el análisis teórico y la definición de las hipótesis que guiarán la secuencia didáctica, tomando en consideración las variantes que pueden surgir durante la experimentación, con el objetivo de prever situaciones en el aula, tanto del estudiante, como del profesor. En la fase de experimentación se deben recolectar la mayor cantidad de datos posibles, para, finalmente contraponer el análisis a priori con los datos obtenidos, con el fin de verificar o objetar las hipótesis definidas al inicio de la investigación (Machado, 2002).

El proceso de validación de las hipótesis se realiza de forma interna, fundamentada en la contraposición del análisis a priori, que contiene las hipótesis, con el análisis a posteriori de la propuesta didáctica, que se sustenta de los resultados de la experimentación, diferenciándose con otros métodos que utilizan la validación externa, esencialmente, en que no se utiliza un grupo experimental y otro de control.

Por tanto, se ha escogido la metodología de la ingeniería didáctica, fundamentalmente por sus características de trabajo; una metodología organizada en cuatro fases consecutivas, que orientan al investigador desde su estudio teórico hasta la recolección de datos de la práctica pedagógica, para finalmente, realizar la confrontación de las hipótesis supuestas y los datos reales después de la experimentación.

2. Tipo de Investigación

Esta investigación se clasifica en el tipo *Investigación-Acción*, tomando en consideración un enfoque mixto, es decir, utilizando elementos cuantitativos y cualitativos para el análisis de resultados.

3. Población y Muestra

Población: Profesores de matemática y estudiantes de pedagogía en matemática en educación media.

Muestra: Estudiantes de primer y tercer año de Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Se contó con 9 sujetos, 5 de la primera categoría y 4 de la segunda.

4. Instalaciones

Para aplicar las actividades se utilizaron las instalaciones del Departamento de Música de Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, sala 212, segundo piso.

5. Procedimientos Utilizados

Tabla 8: Descripción de los procedimientos utilizados

Tipo de instrumento	Descripción	Objetivo(s)	Aplicación
Cuestionario: "Nociones de vectores, estudiantes de pedagogía en matemática".	Este cuestionario contiene 5 preguntas abiertas y 1 cerrada.	Medir el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes de primer y tercer año de la UMCE, con respecto a los vectores y sus diversas representaciones matemáticas, como por ejemplo; grafica, cartesiana, polar, matricial, entre otras.	Se aplicó en los 15 últimos minutos de una clase, con autorización del profesor a cada en cada caso.
Simulador Binaural: "Escena 1".	Simulación de una habitación, utilizando el sonido binaural y el software Pure Data.	Reconocer la ubicación relativa de objetos sonoros en un espacio virtual.	Se aplicó en la sala 212, segundo piso del departamento de música de la UMCE.
Actividad Individual: "Descubriendo mi Sonósfera Interna"	Actividad que consiste en dos partes, la primera es realizar un diagrama o plano de la ubicación de los objetos sonoros que escucharon en la escena 1, la segunda parte consiste en realizar un breve escrito, dando indicaciones de donde están los objetos con respecto al auditor, considerando que debía ser comprendido por alguien que no tenga acceso a escuchar la escena.	Utilizar diferentes representaciones matemáticas para ubicar los objetos sonoros en un espacio sonoro simulado. Relacionar la percepción de la ubicación de objetos sonoros en un espacio simulado, con distintas formas de representación, tanto matemática como espacial, a través de ejes coordenados, plano polar, coordenadas, vectores, puntos cardinales, entre otros.	Se aplicó en la sala 212, segundo piso del departamento de música de la UMCE., posterior a la experimentación de la escena 1.

Actividad Grupal: "Descubriendo mi Sonósfera Interna"	Se repite la primera y segunda parte de la actividad individual, pero ahora deben llegar a un consenso, en grupos de 3 personas y entregar un plano o diagrama definitivo, en conjunto con el escrito de las indicaciones de la posición relativa de los objetos sonoros.	Utilizar diferentes representaciones matemáticas para ubicar los objetos sonoros en un espacio sonoro simulado. Relacionar la percepción de la ubicación de objetos sonoros en un espacio simulado, con distintas formas de representación, tanto matemática como espacial, a través de ejes coordenados, plano polar, coordenadas, vectores, puntos cardinales, entre otros.	Se aplicó en la sala 212, segundo piso del departamento de música de la UMCE., posterior a la actividad individual.
Encuesta: "Preguntas de Opinión y Reflexión"	Encuesta individual, que contiene 3 preguntas basadas en las estrategias que los estudiantes utilizaron para resolver la actividad y 6 preguntas que tienen relación con su opinión acerca de la integración entre música y matemática en la enseñanza escolar y mejoras a la actividad aplicada.	Recoger información de la experiencia sonora vivida por los alumnos participantes, con el fin de comprender los análisis que hicieron los estudiantes y evaluar la actividad para futuras mejoras para posibles experimentaciones futuras.	Se aplicó en una sala del departamento de matemática de la UMCE, posterior a la actividad grupal.

6. Análisis de la Encuesta Inicial

6.1. Análisis Cuantitativo

A continuación, se muestran las tablas con los análisis cuantitativos de la encuesta inicial. La encuesta constaba de 6 preguntas, cada pregunta con 4 puntos asignado, es decir que la encuesta tenía un total de 24 puntos, se considera suficiente con un porcentaje del 60%, equivalente a 15 puntos.

Tabla 9: Muestra el puntaje por pregunta, obtenidos por los estudiantes de primer año de pedagogía en Matemática de la UMCE

Preg. /Est.	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**	**11°**	**12°**	**13°**	**Pje. Prom.**
Pregunta n°1	2	4	3	4	4	4	3	2	4	4	3	4	4	3,5
Pregunta n°2	4	3	4	2	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1,7
Pregunta n°3	3	4	3	1	2	2	3	1	1	2	1	2	1	2,0
Pregunta n°4	1	2	4	4	3	1	4	3	3	0	4	1	1	2,4
Pregunta n°5	2	1	1	2	4	1	0	0	0	1	0	0	1	1,0
Pregunta n°6	3	2	0	3	2	2	2	4	2	3	2	0	0	1,9

														Pje. Prom.
Ptje por est.	15	16	15	16	17	12	14	12	10	10	10	7	8	12,5

Tabla 10: Muestra el porcentaje de logro por pregunta, obtenidos por los estudiantes de primer año de pedagogía en Matemática de la UMCE

Preg. /Est.	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**	**11°**	**12°**	**13°**	**% logro**
Pregunta n°1	50	100	75	100	100	100	75	50	100	100	75	100	100	86,5
Pregunta n°2	100	75	100	50	50	50	50	50	0	0	0	0	25	42,3
Pregunta n°3	75	100	75	25	50	50	75	25	25	50	25	50	25	50,0
Pregunta n°4	25	50	100	100	75	25	100	75	75	0	100	25	25	59,6
Pregunta n°5	50	25	25	50	100	25	0	0	0	25	0	0	25	25,0
Pregunta n°6	75	50	0	75	50	50	50	100	50	75	50	0	0	48,1

														% Logro Prom.
% logro por est.	63	67	63	67	71	50	58	50	42	42	42	29	33	51,9

Interpretación: los estudiantes de primer año de pedagogía en matemática, obtuvieron un promedio de 12,5 puntos de 24, es decir un 51,9 %, con esto, quedan debajo del porcentaje mínimo de conocimientos de los contendidos planteados.

Tabla 11: Muestra el puntaje por pregunta, obtenidos por los estudiantes de tercer año de pedagogía en Matemática de la UMCE.

Preg. /Est.	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**Pje. Prom.**
Pregunta n°1	1	0	4	4	0	4	3	4	3	2,6
Pregunta n°2	3	3	4	4	4	3	3	3	4	3,4
Pregunta n°3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2,0
Pregunta n°4	3	0	4	3	4	3	0	2	2	2,3
Pregunta n°5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0
Pregunta n°6	2	4	1	1	4	3	1	0	4	2,2

										Pje Prom.
Ptje por est.	10	10	15	14	13	16	9	10	16	12,6

Tabla 12: Muestra el porcentaje de logro por pregunta, obtenidos por los estudiantes de 3° año de pedagogía en Matemática de la UMCE.

Preg. /Est.	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**% logro**
Pregunta n°1	25	0	100	100	0	100	75	100	75	63,9
Pregunta n°2	75	75	100	100	100	75	75	75	100	86,1
Pregunta n°3	25	75	50	50	25	75	50	25	75	50,0
Pregunta n°4	75	0	100	75	100	75	0	50	50	58,3
Pregunta n°5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0
Pregunta n°6	50	100	25	25	100	75	25	0	100	55,6

										% Logro Prom.
% logro por est.	42	42	63	58	54	67	38	42	67	52,3

Interpretación: los estudiantes de tercer año de pedagogía en matemática, obtuvieron un promedio de 12,6 puntos de 24, es decir un 55,6 %, con esto, quedan debajo del porcentaje mínimo de conocimientos de los contendidos planteados.

6.2. Comparación entre Resultados

En comparación, los conocimientos que tienen los estudiantes de primer y tercer año sobre el contenido de vectores, no varían mucho, puede ser por el planteamiento de la actividad, ya que no eran ejercicios de calcular o demostrar, más bien definiciones y aplicación a otras disciplinas, habilidad de que no se potencia en la carrera. Se esperaría que los estudiantes de tercer año, obtuvieran un mayor porcentaje de rendimiento en la encuesta, ya que en tercero, ya han aprobado todas las asignaturas en las que se estudian vectores.

6.3. Análisis Cualitativo

Las posibles respuestas que los estudiantes pudieron dar son:

1. Un vector es un segmento dirigido, es decir, una magnitud física que posee tres características fundamentales; tiene un módulo (longitud del segmento), una dirección (orientación del segmento) y un sentido (indica el origen y término del segmento).
2. Se puede representar en el plano cartesiano, como una coordenada, es decir, si tenemos el vector p y lo queremos representar en el plano cartesiano, se escribe como $\vec{p} = (x, y)$, siendo x e y la distancia del centro (0,0) al final del vector, en el $eje\ x$ y en el $eje\ y$ respectivamente. También se puede representar de forma gráfica, por un segmento dirigido, pudiendo o no estar en el plano coordenado. Y por último, también se puede representar en el plano polar, utilizando una distancia y un ángulo, teniendo un punto O como centro, llamado también origen o polo y una semirrecta que comienza en O y es equivalente al eje x, en el plano cartesiano. También se puede representar como una coordenada, indicando la distancia r como primera coordenada y el ángulo θcomo segunda coordenada (r, θ).

3. Las asignaturas en las que se utilizan los vectores son: álgebra 1; para representar los números complejos en su forma polar, geometría en el plano; se ven como segmentos dirigidos, álgebra lineal; se trabajan los espacios vectoriales, geometría en el espacio; se utilizan vectores en el plano, entre otros.
4. La información necesaria es subjetiva, ya que depende de la estrategia que utilicen las personas para resolver la problemática. Se pueden considerar puntos de referencia, dimensiones al plano completo y a las habitaciones, saber si se pueden mover en diagonal o es necesario moverse en horizontal y vertical, entre otros.
5. El vector que se muestra en la figura, tiene varios datos que se pueden deducir, como el valor de $|\vec{u}| = \sqrt{2}$, ya que se forma un cuadrado y el vector forma la diagonal, también se puede calcular a través del teorema de Pitágoras, además el ángulo formado es de $45º$, por lo tanto el vector en forma polar queda

$$\vec{u} = (\sqrt{2},\ \ 45º)\ o\ \vec{u} = \left(\sqrt{2},\ \ \frac{\pi}{4}\right)$$

6. Es posible relacionar los vectores con la música a través del sonido, ya que, se puede posicionar el sonido en un espacio virtual y ubicar en un plano la percepción del sonido escuchado. Otra forma sería relacionarlo con las ondas sonoras y encontrar una relación.

7. Método de Aplicación

Se aplicó una actividad didáctica centrada en estudiantes de primer y tercer año de pedagogía en matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, en la cual, debían reconocer la ubicación relativa de objetos sonoros en un espacio sonoro virtual, utilizando herramientas matemáticas para representar los sonidos en un plano, para esto, se utilizó el software Pure Data para la creación de la escena, con el fin de acercar a los futuros profesores de matemática a una herramienta que puede ser útil en su labor educativa el día de mañana y además, puedan considerar el sonido como otro medio de representación de elementos matemáticos que pueden ser beneficiosos para el proceso de enseñanza-aprendizaje. La actividad fue analizada bajo el marco de la Ingeniería Didáctica.

8. Fases de la Ingeniería Didáctica para ésta Investigación

A continuación se describen las principales acciones planificadas cada una de las fases de la ingeniería didáctica, que llevarán a alcanzar los objetivos de la investigación.

8.1. Fase 1: Análisis Preliminar

En esta primera fase será realizada una revisión bibliográfica abordando los tópicos asociados a la enseñanza de la matemática de: teoría de las situaciones didácticas, registros de representación semiótica, ingeniería didáctica y aprendizaje mediado por computadoras. Además, se realizará un estudio de conceptos musicales y de sonido con el fin de realizar una asociación entre los contenidos de matemática propuestos en las bases curriculares y dichos conceptos.

Este análisis preliminar, también contempla la recolección de algunos datos sobre el nivel de conocimiento matemático que tienen los estudiantes que serán participantes de la actividad, esto se hará mediante el cuestionario: "Nociones de vectores, estudiantes de pedagogía en matemática".

La actividad está planteada de la siguiente manera: los estudiantes escucharan las instrucciones leídas por el profesor y podrán seguir la lectura, ya que están contenidas en la *Guía para el estudiante*, a continuación se pondrán los audífonos, luego, comienzan con la actividad sugerida.

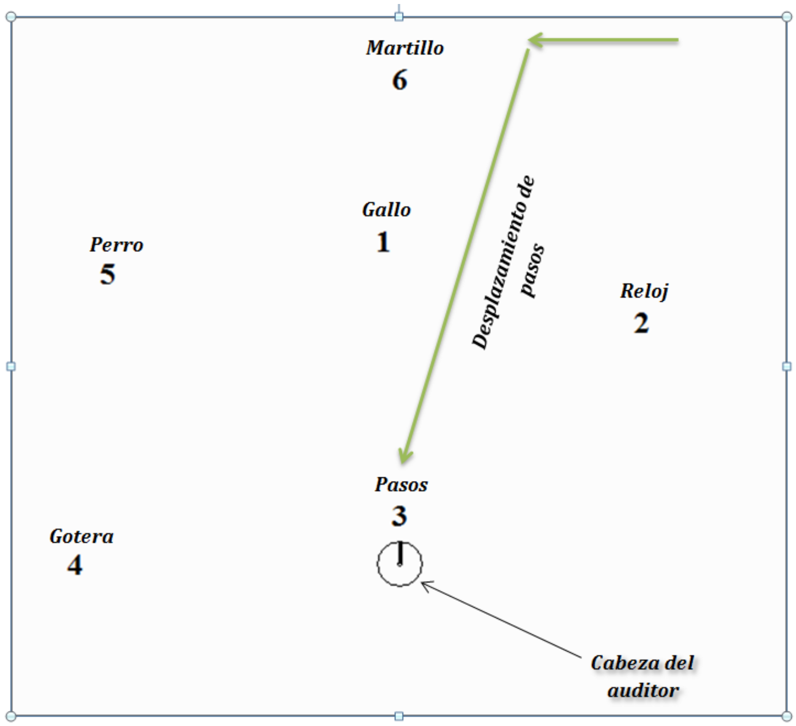


Figura 11: Muestra la ubicación de cada sonido en la actividad “Descubriendo mi Sonósfera Interna”.

Es importante destacar, que a pesar de considerar ciertas posiciones como correctas, la percepción del sonido es personal y diferente para cada individuo. En base a esto, si el auditor concluye algo semejante a lo planteado, pero no exacto, también estará en lo correcto, solo que la percepción del sonido distante, muchas veces no discrimina que tan lejano está se puede encontrar un objeto.

8.2. Fase 2: Concepción y Análisis a Priori

8.2.1. Concepción

En esta segunda fase se construye la propuesta de actividad, utilizando los pach programados en Pure Data. Para ello, se definen las variables micro-didácticas, que tiene relación con los resultados esperados al momento de aplicar la actividad; utilización de puntos cardinales, plano cartesiano, plano polar, vectores bidimensionales, entre otros.

De forma paralela, se crea una *Guía de Uso* del pach, una *Guía para el Estudiante* y una *Guía para el Profesor*, las que contiene los objetivos y otros datos relevantes de la actividad.

8.2.2. Análisis a Priori

A continuación se exponen las posibles soluciones que los estudiantes pueden utilizar para resolver la situación planteada, mostrando gráficamente el plano pedido.

8.2.2.1. Primer Método.

Si nos situamos en un ***plano cartesiano***, se puede asignar coordenadas rectangulares a cada posición en la que se encuentran los objetos sonoros, quedando de la siguiente manera:

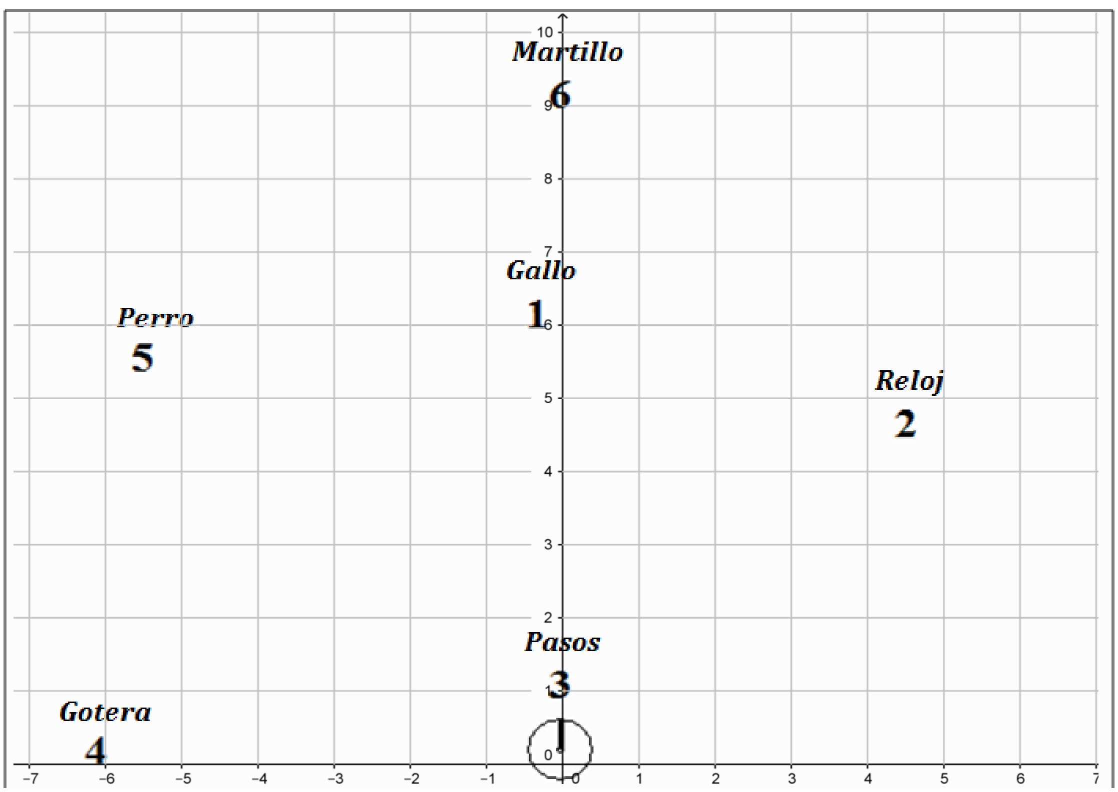


Figura 12: Muestra una posibles representación de los objetos sonoros en el plano cartesiano.

Gallo: se ubica aproximadamente en $(-0{,}25,\ 6)$

Perro: se ubica aproximadamente en $(-6,\ 5{,}75\ )$

Reloj: se ubica aproximadamente en $(5,\ 4{,}5)$

Gotera: se ubica aproximadamente en $(-6{,}5,\ 0)$

Martillo: se ubica aproximadamente en $(0,\ 9{,}25)$

Pasos: se desplazan desde el punto $(5, 9{,}5)$ en hasta el punto $(1, 9{,}5)$ y luego, hasta $(0, 1)$.

8.2.2.2. Segundo Método.

Si pensamos en la distancia desde la cabeza a los objetos, también se puede reconocer ***vectores***, ya que podemos trazar líneas rectas con dirección y sentido, a excepción del sonidos de los pasos, ya que tiene un desplazamiento, lo que se podría considera es donde se encuentran los pasos en cierto instante, o también la ubicación inicial y final, para tener una suma de vectores, de la siguiente manera:

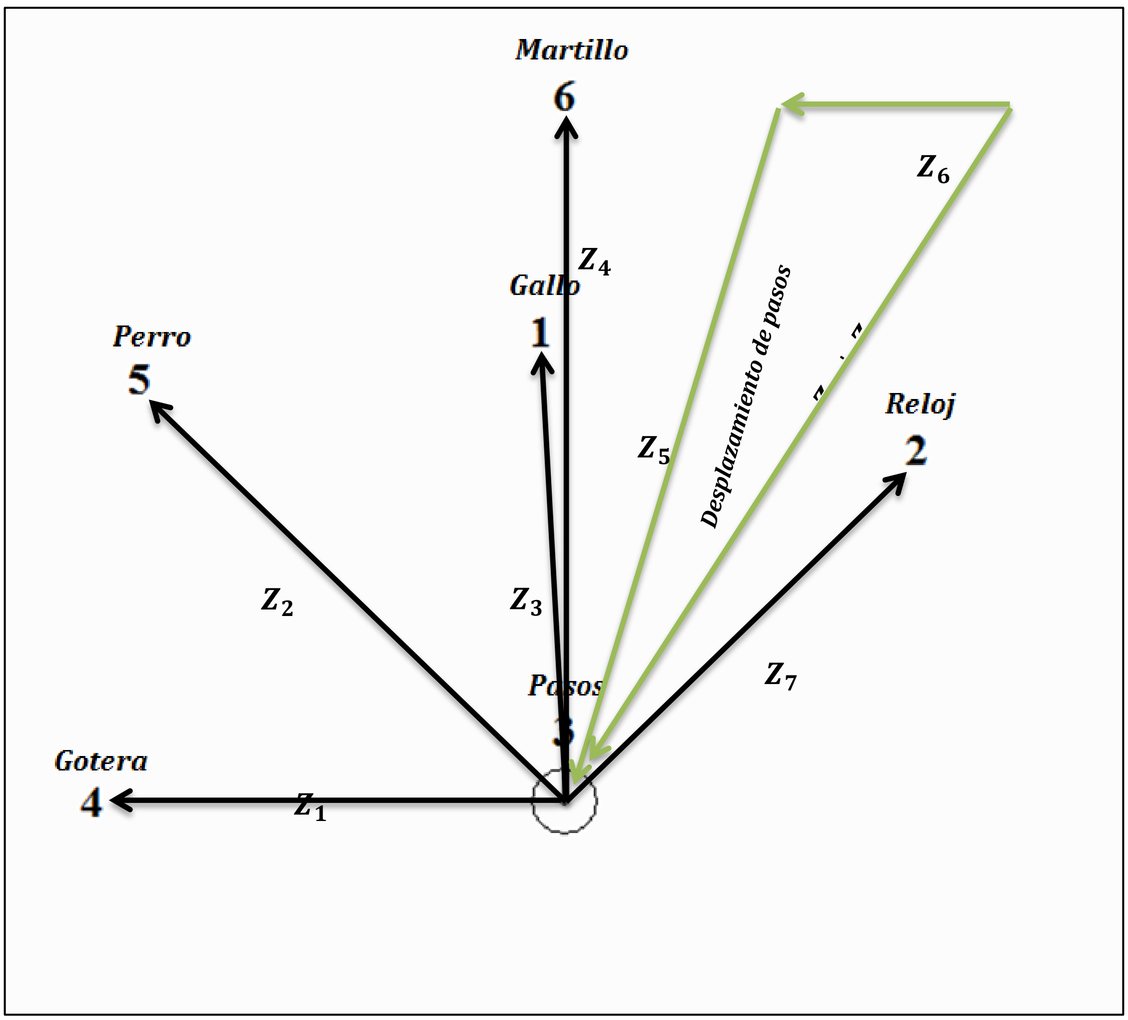


Figura 13: Muestra una posibles representación de los objetos sonoros usando vectores.

8.2.2.3. *Tercer Método.*

Si pensamos en un plano polar, podríamos tener coordenadas polares, considerando solo la distancia y el ángulo de inclinación del segmento formado desde la cabeza hasta el objeto sonoro, de la siguiente manera:

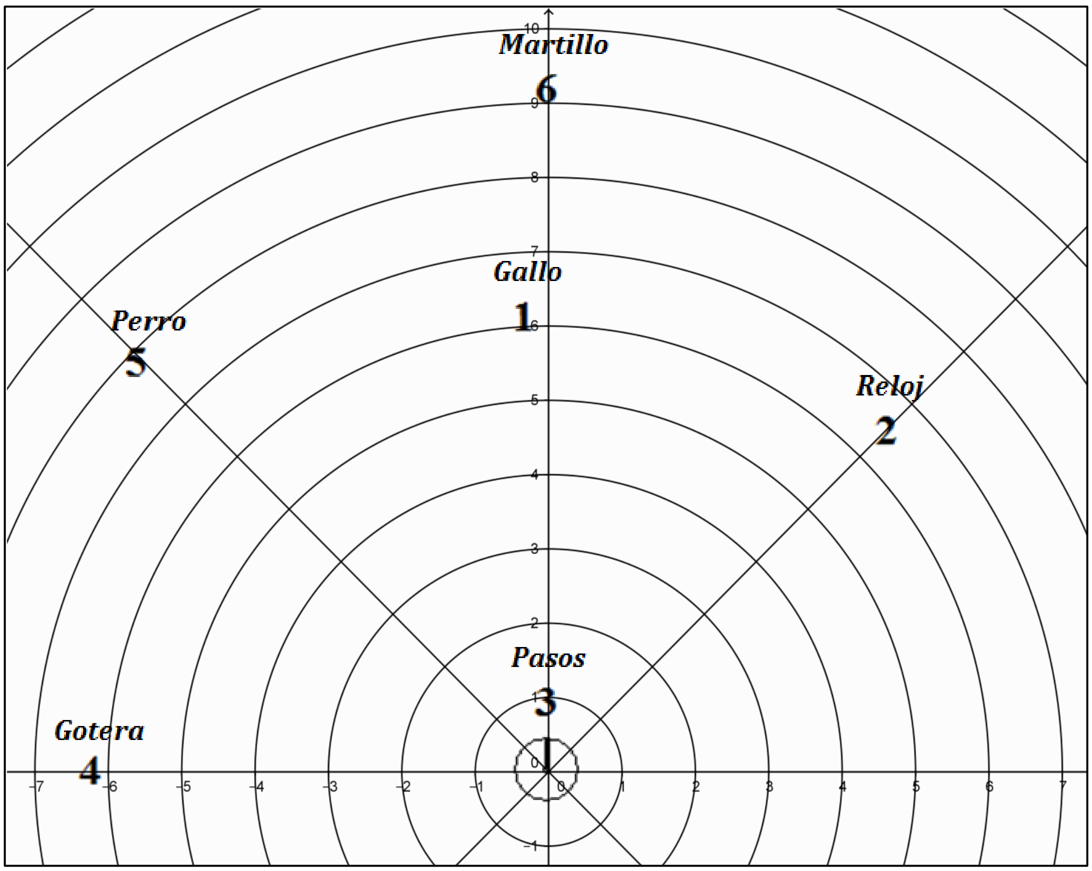


Figura 14: Muestra una posibles representación de los objetos sonoros usando vectores.

Podemos notar, que utilizando el plano polar, es sencillo verificar una distancia aproximada de los sonidos, basándonos en el radio formado. En esta figura, tenemos la división del plano en 8 partes, quedado cada parte con un ángulo de $45º\ o\ \frac{\pi}{4}rad$, por lo tanto, la posición de los sonidos en coordenadas polares (r, α), con r medido en metros y α, medido en grados sexagesimales o radianes. Podría quedar se la siguiente manera:

Gotera: $(6{,}25,\ 180º)\ o\ (6{,}25,\ \pi)$

Perro: $(8,\ 135º)\ o\ \left(8,\ \frac{3}{4}\pi\right)$

Martillo: $(9{,}3,\ 90º)\ o\ \left(9{,}3,\ \frac{1}{2}\pi\right)$

Gallo: $(6,\ 93º)\ o\ \left(6,\ \frac{31}{60}\pi\right)$

Reloj: $(6{,}5,\ 45º)\ o\ \left(6{,}5,\ \frac{1}{4}\pi\right)$

Pasos, en el caso de los pasos, se puede considerar la ubicación final, es decir hasta donde se percibió su desplazamiento, en este caso sería: $(1,\ 90º)\ o\ \left(1,\ \frac{1}{2}\pi\right)$.

Esas son las posibles estrategias que pueden utilizar los estudiantes para llegar a una conclusión y a un esquema definitivo. Siempre pueden surgir otro ti de representaciones, pero sólo se consideraron esas para el análisis a priori.

8.2.2.4. Posibles respuestas a la encuesta de opinión y reflexión

Las Estrategias

1. ¿Reconoce algún concepto o habilidad matemática en los procedimientos que utilizó en la actividad? Nómbrelos y destaque aquellos que considere más relevantes.

Los conceptos matemáticos involucrados en la actividad son los vectores, la ubicación de puntos en el plano, ya sea cartesiano o polar, ubicación espacial, coordenadas rectangulares y polares. La habilidad más relevante es utilizar notación o recursos matemáticos para resolver la actividad, siendo que, se podía llegar a conclusiones sin utilizarlas.

2. Describa detalladamente la estrategia que usó (paso a paso).

En esta pregunta pueden existir diversas respuestas, dependiendo del foco que se le dio a la actividad. Se podía realizar un diagrama con dibujos más cerca o lejos de la cabeza del auditor, podía dibujar un plano cartesiano y darle coordenadas a los objetos ya ubicados, un plano polar, considerando el radio y el ángulo de inclinación, que a pesar de ser más intuitivo cuando se ubican posiciones en un plano, es más difícil ponerlo en práctica cuando se pide realizar un esquema, también se pudo basar en la utilización de vectores, que comienzan en la cabeza del auditor y terminan en la posición en la que se encuentra el objeto, tal vez, utilizando el modulo del vector para calcular una distancia aproximada del auditor.

3. Haciendo un análisis de la estrategia utilizada, ¿se le ocurre otra estrategia que permite optimizar su desempeño? Descríbala detalladamente.

Dependiendo de la alternativa que hayan escogido en la pregunta anterior, aparecen varias posibilidades como recursos extra, también pudo simplemente utilizar un sistema de referencia con puntos cardinales o coordenadas geográficas, utilizando la latitud y la longitud como la ubicación de cada objeto sonoro.

La Actividad

En esta segunda parte de las preguntas, se espera la opinión de aspectos pedagógicos y expectativas de la interdisciplinariedad entre matemática y música, además de recoger sugerencias y críticas de la actividad aplicada. Por esto, las respuestas serán muy variadas y se considerarán algunas de las opciones.

1. ¿Considera importante incorporar elementos de la música o del sonido en la enseñanza de la matemática escolar? Justifique su respuesta.

El participante puede o no considerar importante la integración de la música dentro de la educación escolar, dependerá mucho de lo que conozca sobre el tema y de la visión de la educación que tenga cada persona. Hay que tener en consideración que muchos estudios actuales, hablan sobre la importancia de la integración de los contenidos que se enseñan en el sistema escolar, ya que se evidencia un significativo aumento de la comprensión de los contenidos e integración de estos en la vida cotidiana.

2. ¿Cree que el sonido o la música puede ayudar a la comprensión de ciertos conceptos matemáticos? Justifique su respuesta.

Se ha demostrado que es así, muchos de los grandes matemáticos también fueron grandes músicos, desarrollan habilidades superiores que las personas que no tienen relación con la música, aprender un instrumento musical o involucrase con aspectos musicales, definitivamente ayuda a mejorar en matemática, muchas investigaciones lo avalan y aseguran que las personas que tienen instrucción musical también mejoran el rendimiento en las matemáticas.

3. ¿Le gustaría que en su formación profesional se incorporaran talleres o cursos en los cuales se trabaje la interdisciplinariedad entre matemática y otras áreas del conocimiento? ¿Por qué?

Esta respuesta solo se puede responder de forma individual, las justificaciones tienen que ver con sus intereses personales y su visión de la labor docente que quiera desempeñar en el futuro.

4. ¿Participaría de un taller o curso en donde se entreguen herramientas para trabajar la integración entre música y matemática? ¿Qué esperaría de él?

Puede o no interesarle participar en un curso, dependerá de sus intereses personales y de la visión de educación que tenga para el futuro y su labor docente.

5. ¿Cree que a través del sonido ubicado en un espacio virtual se pueden enseñar vectores? Justifique su respuesta.

A pesar de que la percepción del sonido es subjetiva y diferente en cada persona, se puede enseñar vectores, o al menos introducir el contenido a partir de la ubicación de sonidos en un espacio sonoro.

6. ¿Qué opina de la experiencia sonora virtual que acaba de escuchar? ¿Qué cambios o sugerencias recomendaría para mejorarlo?

Algunas de las observaciones importantes sería incorporar más elementos matemáticos evidentes, también mejorar el tiempo, ya que la actividad es muy larga y en algún momento puede volverse tedioso por lo extenso de ésta.

8.3. Fase 3: Experimentación

Previo a la experimentación, se realizaron algunas pruebas de usabilidad con personas externas a la investigación y se aplicó la actividad en personas que no estaban dentro de la muestra escogida.

El día anterior a la experimentación se preparó la sala, ubicando adecuadamente el mobiliario, el computador, los audífonos y el resto de los recursos necesarios, se imprimieron las hojas con las actividades y las guías correspondientes al profesor y al estudiante.

Se estimaba un tiempo de 45 minutos por grupo para realizar la actividad, pero en la experimentación tomó de 1 hora a 1 horas con 10 minutos.

La recolección de datos para esta investigación, fue a través de la observación directa de la aplicación de la actividad. Una vez finalizada la actividad se aplicó una encuesta de opinión y reflexión, que tuvo como objetivos, recoger la percepción de los estudiantes, con respecto a sus procesos y su percepción de la actividad.

La actividad fue aplicada el día 23 de marzo de 2017, en la sala 212 del departamento de música de la UMCE, tuvo una duración total de 4 horas cronológicas.

8.4. Fase 4: Análisis a Posteriori y Validación

En esta última fase de la ingeniería didáctica, se muestran tablas y análisis de los datos recolectados durante la fase de experimentación. Los resultados son contrastados con los supuestos descritos en la fase de análisis a priori. De las conclusiones obtenidas en ese proceso, son validadas las variables micro-didácticas, lo que se traduce en la validación de la actividad propuesta.

8.4.1. Análisis a Posteriori

8.4.1.1. Grupo 1

Integrado por tres estudiantes de *primer año* de la carrera (I1, I2, I3), es decir, aun no tienen ninguna asignatura en la que hayan visto vectores o coordenadas polares, sólo tienen conocimientos del plano cartesiano desde el colegio.

Análisis actividad individual

Diagrama y descripción escrita de la escena sonora

Los tres estudiantes realizaron un esquema similar, en el que dibujaron los sonidos que oyeron, es decir, que en su diagrama aparecía el dibujo de los pasos, del perro, del martillo, del gallo, del goteo y del reloj, indicando un posible valor numérico de la distancia a la que se encontraban del auditor. No utilizaron ningún sistema de coordenadas matemático, en un caso, utilizó un sistema de referencia de puntos cardinales.

Las diferencias más notorias entre los estudiantes estuvieron en la descripción escrita de la escena. A continuación se muestra los diagramas y escritos realizados:

Informante 1

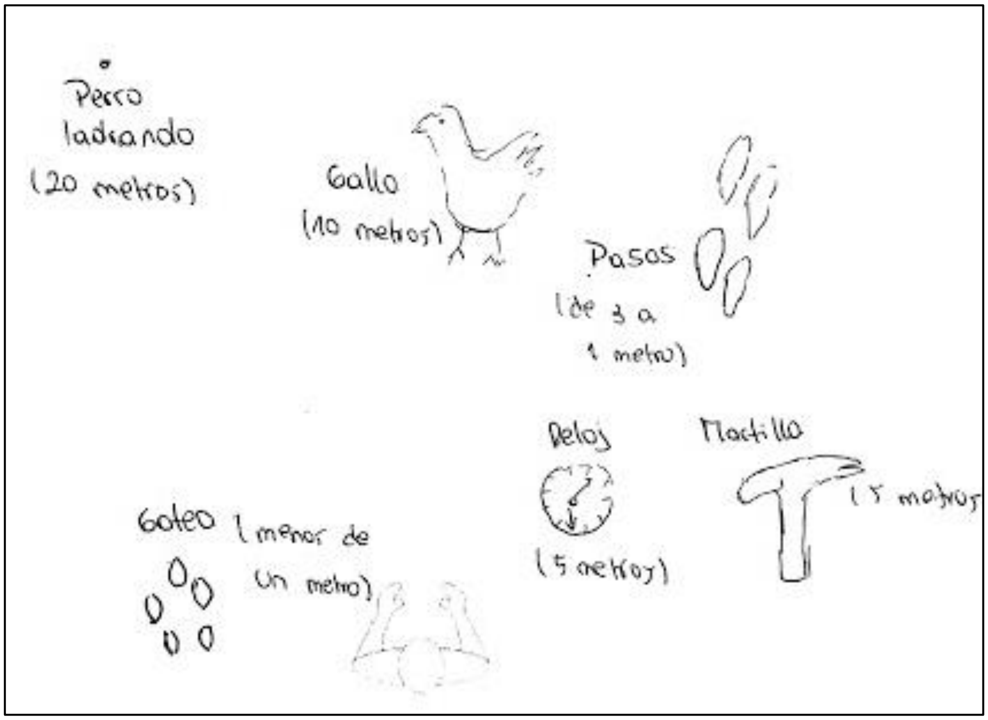
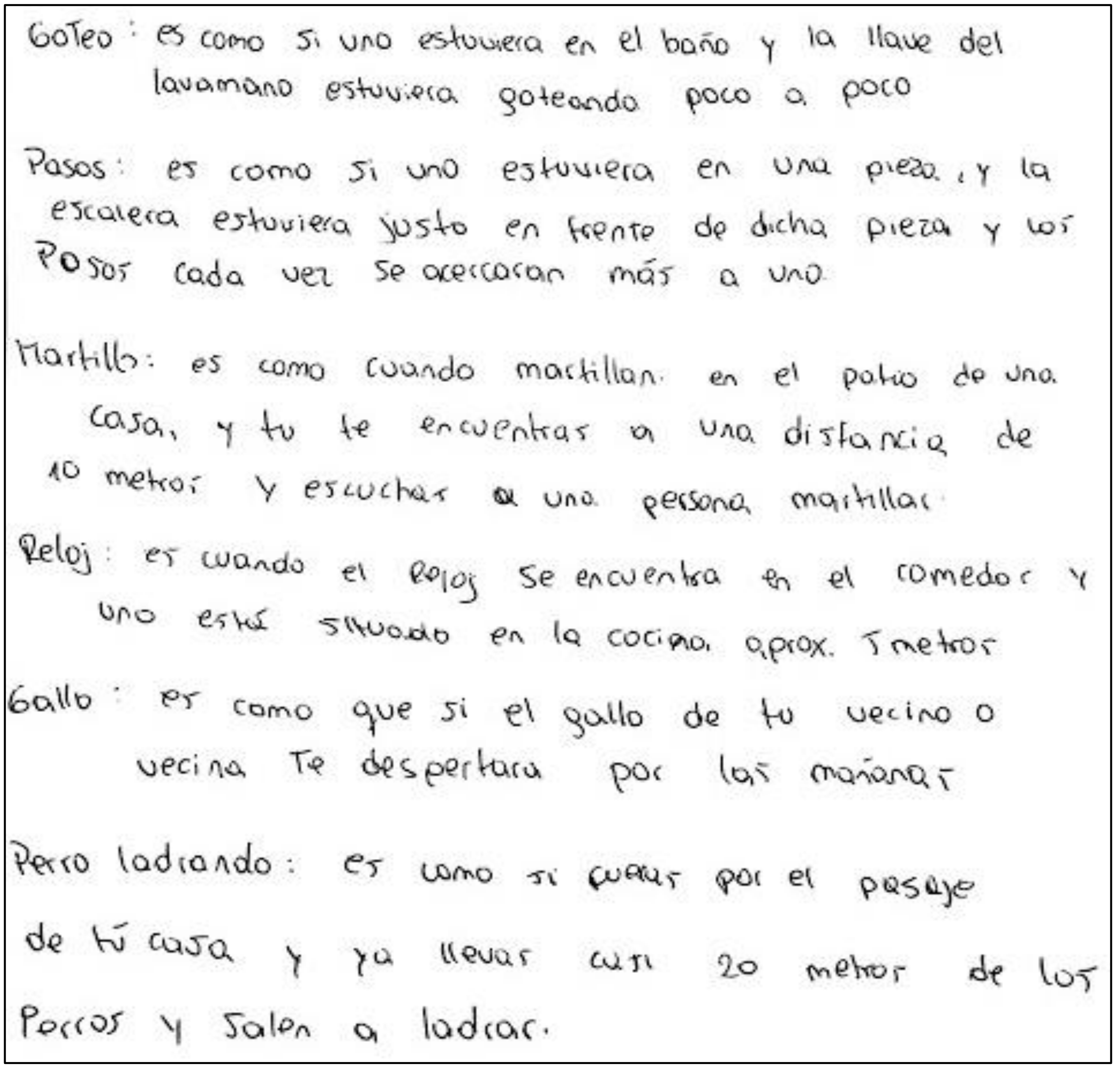


Figura 15: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figurel realizado por el I1.


Goteo: es como si uno estuviera en el baño y la llave del lavamano estuviera goteando poco a poco

Pasos: es como si uno estuviera en una pieza, y la escalera estuviera justo en frente de dicha pieza y los pasos cada vez se acercaran más a uno

Martillo: es como cuando martillan en el patio de una casa, y tu te encuentras a una distancia de 10 metros y escuchas a una persona martillar.

Reloj: es cuando el reloj se encuentra en el comedor y uno está situado en la cocina aprox. 5 metros

Gallo: es como que si el gallo de tu vecino o vecina te despertara por las mañanas

Perro ladrando: es como si cuando por el pasaje de tú casa y ya llevas casi 20 metros de los perros y salen a ladrar.

Figura 16: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I1.

El Informante 1, utilizó solo la percepción apoyándose de las sensaciones diarias de los sonidos, basándose en la realidad que escucha y una posible distribución de una casa regular, con espacios determinados. Posiblemente este estudiante, imaginó detalladamente el espacio sonoro.

Informante 2

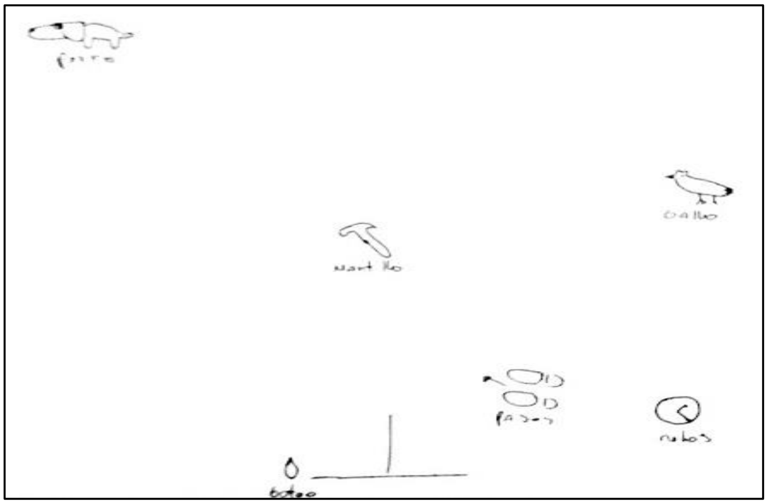
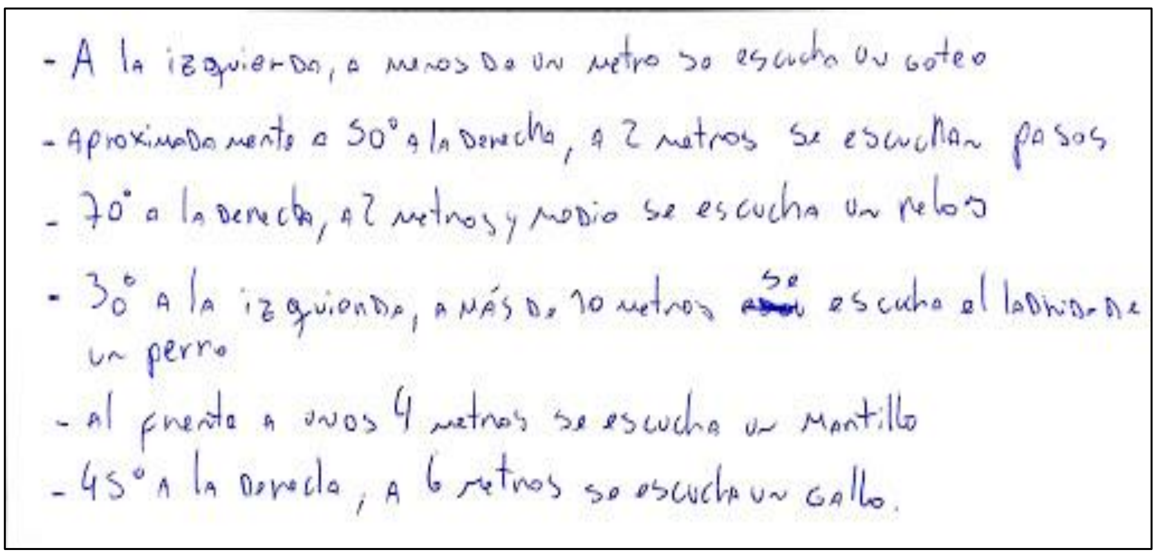


Figura 17: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figurel realizado por el I2.



- A la izquierda, a menos de un metro se escucha un goteo
- aproximadamente a 50° a la derecha, a 2 metros se escuchan pasos
- 70° a la derecha, a 2 metros y medio se escucha un reloj
- 30° a la izquierda, a más de 10 metros se escucha el ladrido de un perro
- al frente a unos 4 metros se escucha un martillo
- 45° a la derecha, a 6 metros se escucha un gallo.

Figura 18: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I2.

El Informante 2, hizo notar la inclinación en que se encontraban los objetos, utilizando ángulos y distancias para las indicaciones, lo llamativo de esta descripción es que inconscientemente utiliza un sistema polar, probablemente nunca lo ha trabajado de esa manera, pero intuitivamente pudo referirse a este.

Informante 3

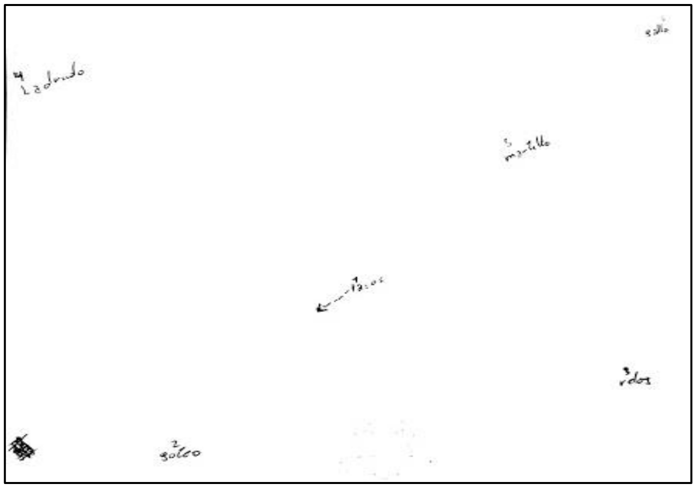


Figura 19: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figurel realizado por el I3.

-Los pasos se es cuchaban al frente, como si la persona caminava desde el NE hacia el SO y pasaba masomenos cerca
- el goteo se escuchaba al lado izquierdo, bastante cerca
- el reloj estaba al lado derecho, pero un poco en diagonal hacia el frente y estaba masomenos cerca
- el perro se escuchaba al noroeste de la persona, masomenos lejos
- el martillo estaba al noreste, ni tan cerca ni tan lejos,
- el gallo Tambien estaba al noreste, pero mas lejos que el martillo

Figura 20: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I3.

El Informante 3, recurrió al sistema de puntos cardinales, indicando de manera subjetiva la posición de los objetos sonoros en el espacio virtual. Método valido de todas formas, pero menos exacto que el utilizando por el I2.

Análisis actividad grupal

Diagrama y descripción escrita de la escena sonora

En esta parte de la actividad, debían discutir las posibilidades para realizar un esquema definitivo de la posición de los sonidos, por ende, debían llegar a consensos. A continuación se presenta el diagrama final del Grupo 1 (informante 1, 2 y 3):

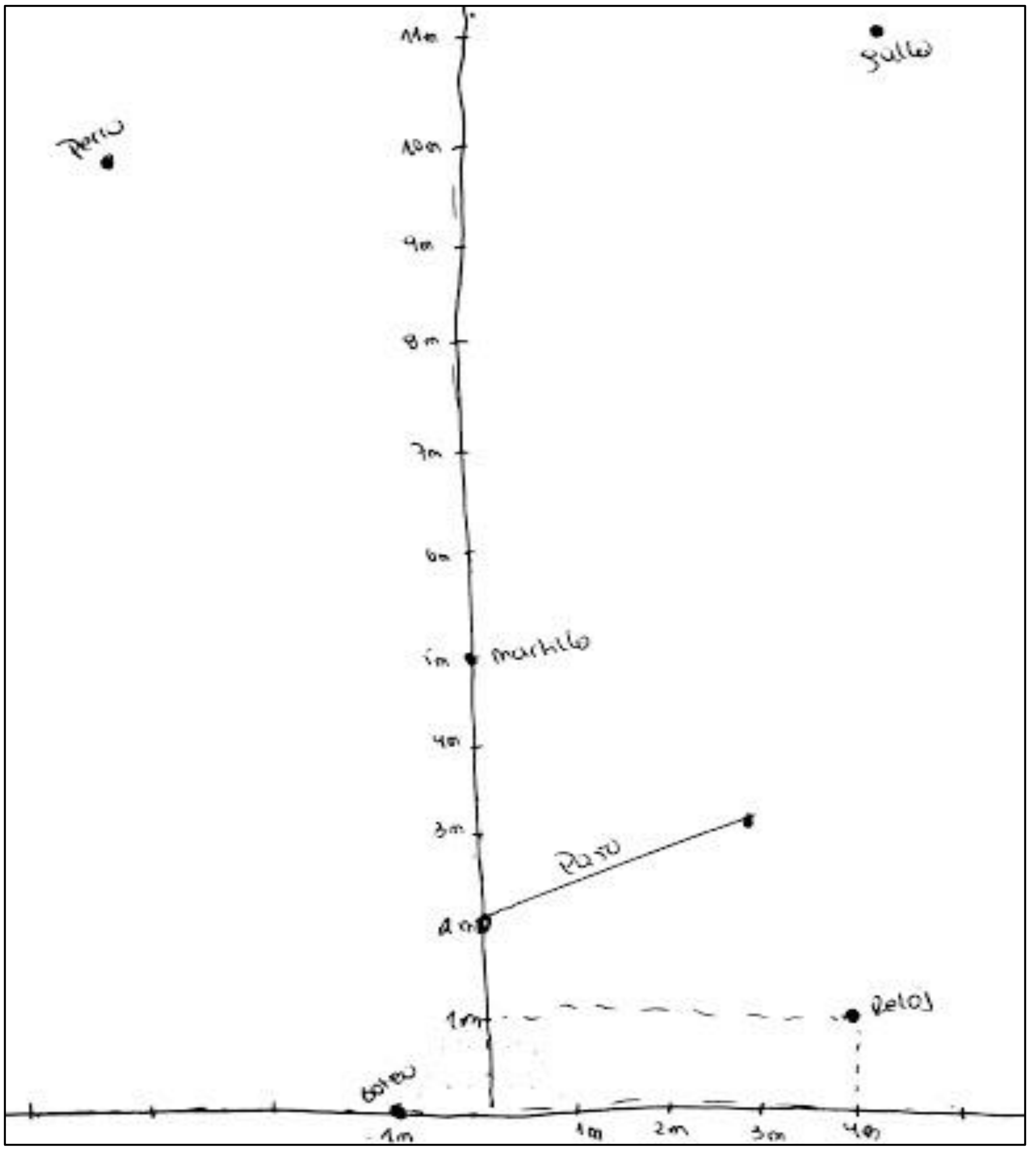
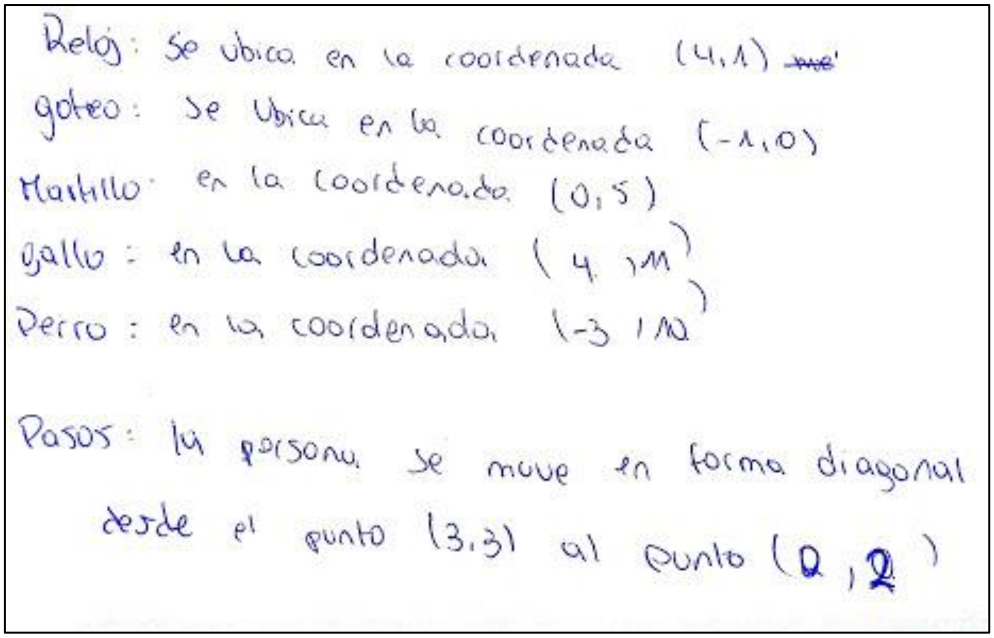


Figura 21: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje geométrico realizado por el Grupo 1.



Relój: se ubica en la coordenada (4,1)
goteo: se Ubica en la coordenada (-1,0)
Martillo: en la coordenada (0,5)
gallo: en la coordenada (4,11)
Perro: en la coordenada (-3,10)

Pasos: la persona se mueve en forma diagonal desde el punto (3,3) al punto (2,2)

Figura 22: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el Grupo 1.

Podemos notar que al momento de trabajar en equipo surgieron nuevas ideas, como considerar el plano cartesiano y darle coordenadas a los puntos que representan los objetos sonoros, además de utilizar un segmento de recta para mostrar el desplazamiento de los pasos. Surgieron ideas interesantes en la discusión, a pesar de no escribirlo en el instructivo, comentaron sobre considerar los ángulos de inclinación o utilizar Pitágoras para calcular la distancia a la que se encuentran los objetos desde el la intersección de los ejes, que representa la cabeza del auditor.

8.4.1.2. Grupo 2

Integrado por tres estudiantes de *tercer año* de la carrera (I4, I5 Y I6), es decir, ya han participado de asignaturas donde utilizan vectores, rectas, planos y distintos medios de representación matemática. En este grupo participó la única mujer en la experimentación, quien coordinó el grupo en la actividad grupal.

Análisis actividad individual

Diagrama y descripción escrita de la escena sonora

Dos de los tres estudiantes realizaron un esquema similar, en el que pusieron los nombres de los sonidos y un punto indicando la posición en la que se encuentra y tercer participante utilizó flechas, se pueden considerar vectores, que salían desde el auditor hasta el objeto. No utilizaron ningún sistema de coordenadas matemático, ni tampoco le agregaron valores a las distancias en los diagramas.

En las descripciones tampoco se evidencias muchas diferencias, ya que ocupan distancias subjetivas, como cerca o lejos y en uno de los cosas utiliza los puntos cardinales.

A continuación se muestra los diagramas y escritos realizados:

Informante 4

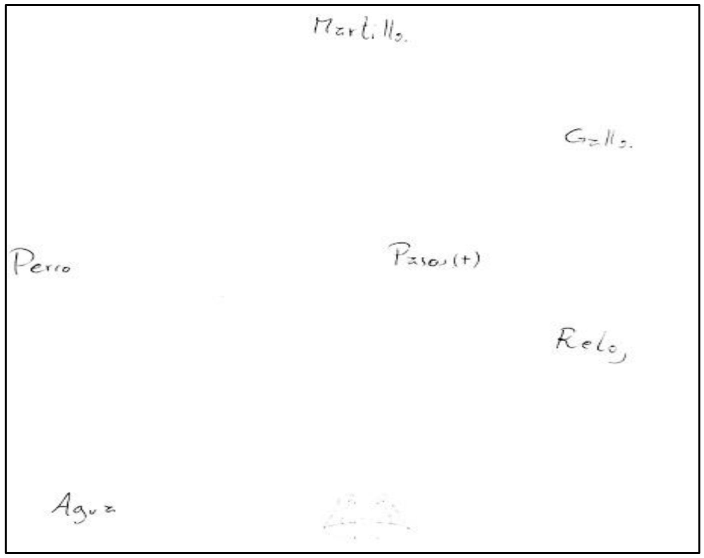
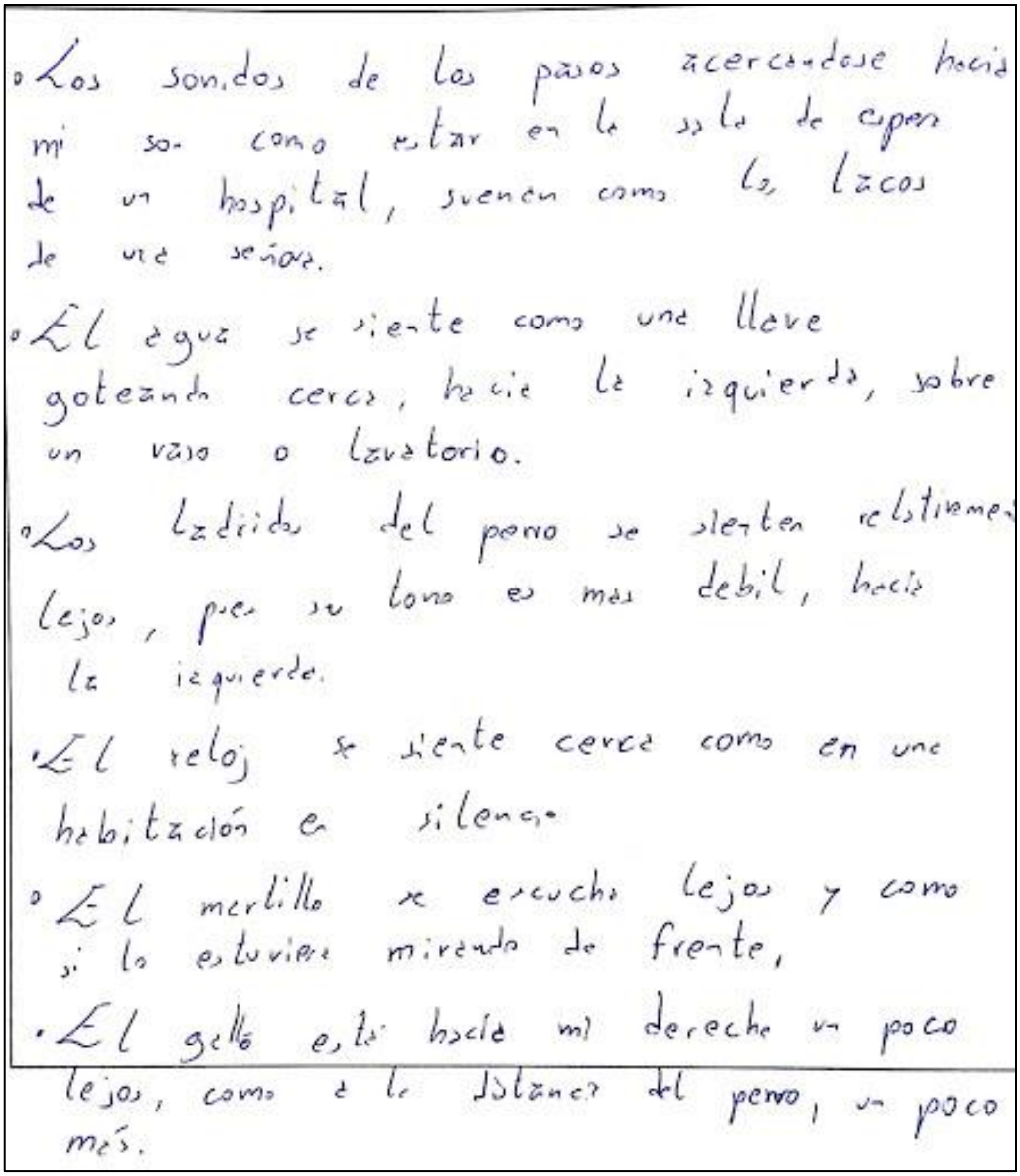


Figura 23: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figural realizado por el I4.



- Los sonidos de los pasos acercandose hacia mi son como estar en la sala de espera de un hospital, suenan como los tacos de una señora.
- El agua se siente como una llave goteando cerca, hacia la izquierda, sobre un vaso o lavatorio.
- Los ladridos del perro se sienten relativamente lejos, pues su tono es mas debil, hacia la izquierda.
- El reloj se siente cerca como en una habitación en silencio
- El martillo se escucha lejos y como si lo estuviera mirando de frente,
- El gallo está hacia mi derecha un poco lejos, como a la distancia del perro, un poco más.

Figura 24: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I4.

El Informante 4, utilizó solo la percepción apoyándose de las sensaciones diarias de los sonidos, basándose en la realidad que ha vivido, de manera similar a un integrante del grupo 1. Posiblemente este estudiante, imaginó detalladamente el espacio sonoro, pero no lo asoció a un elemento matemático.

Informante 5

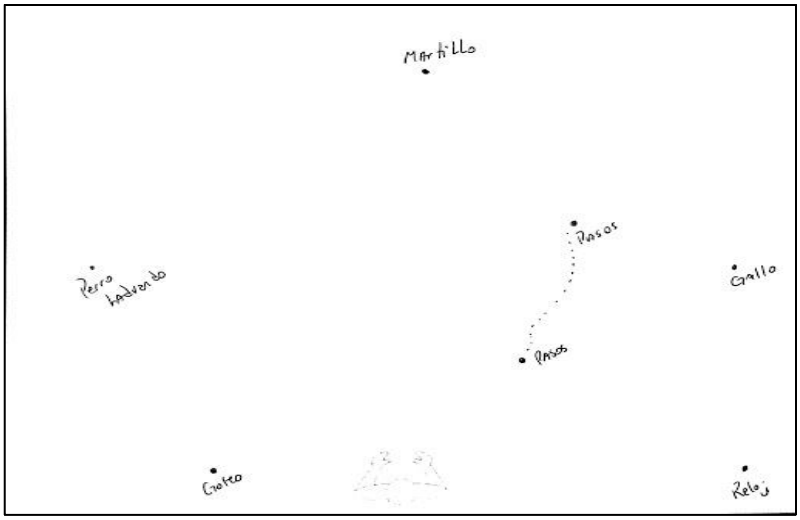


Figura 25: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figural realizado por el I5.

Lo primero que se escucha es una persona caminando
no muy lejos de nosotros, que se va acercando poco a poco,
terminando practicamente a nuestro lado.
Luego, se escucha un goteo al lado izquierdo, cae
mucha agua, no solo unas gotas, sobre algun recipiente
y a lleno. A la derecha, se escuchan con claridad
las manillas del reloj.
Despues de un momento, se oye a lado Izquierdo el
ladrido de un perro, ladra con fuerza y
mientras se escucha un martilleo a lo lejos,
frente a nosotros, casi al final de la habitació
El gallo, se escucha luego de esto, el cual
estaba a la derecha, a pocos metros de
nosotros.

Figura 26: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I5.

El Informante 5, también explica la percepción sonora sin utilizar ningún tipo de sistema de referencia, solo de manera subjetiva, haciendo referencia a cerca o lejos del auditor.

Informante 6

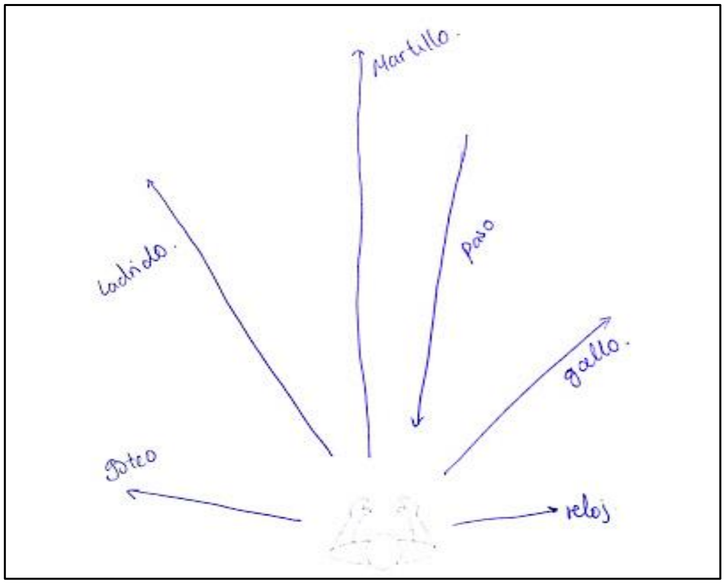


Figura 27: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figural realizado por el I6.

Primeramente se escucha el sonido de los paso, los cuales vienen hacia mi posición, mas menos de Noreste a sur.

Como segundo sonido se encuentra el goteo, este se siente por el lado izquierdo (oeste) de manera cercana, mas menos por la misma distancia, pero por el lado derecho (este) se escucha el reloj.

El ladrido se escucha de manera lejana con una posición Noroeste, más cercana eso sí que los primeros pasos del principio.

Finalmente se escucha el martillo, el cual se siente de manera recta (Norte) y bastante lejana, diría que es la más lejana de todas.

Figura 28: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I6.

El Informante 6, a pesar de utilizar otra manera de realizar la representación gráfica, sólo utilizó los puntos cardinales para su explicación, sin tener una integración de contenidos matemáticos, pero siendo un poco más preciso que el resto de los integrantes del grupo 2.

Análisis actividad grupal

Diagrama y descripción escrita de la escena sonora

La discusión del Grupo 2 (participantes D, E y F), comenzó con el análisis de los pasos, ayudándose de puntos de referencia cardinales, luego con el resto de los sonidos, hicieron un diagrama borrador y uno de los integrantes tomó nota mientras escuchaba la escena sonora. En las notas puso un plano cartesiano. Dentro de la discusión, se consideró si la persona se movía o lo hacían los objetos, llegando a la conclusión de que los objetos estaban fijos y solo los pasos se movían en dirección al auditor. Luego, discutían sobre la distancia numérica a la que estaban los objetos y se les ocurrió trabajar con el teorema de Pitágoras para calcularlo, ubicando los puntos en un plano cartesiano.

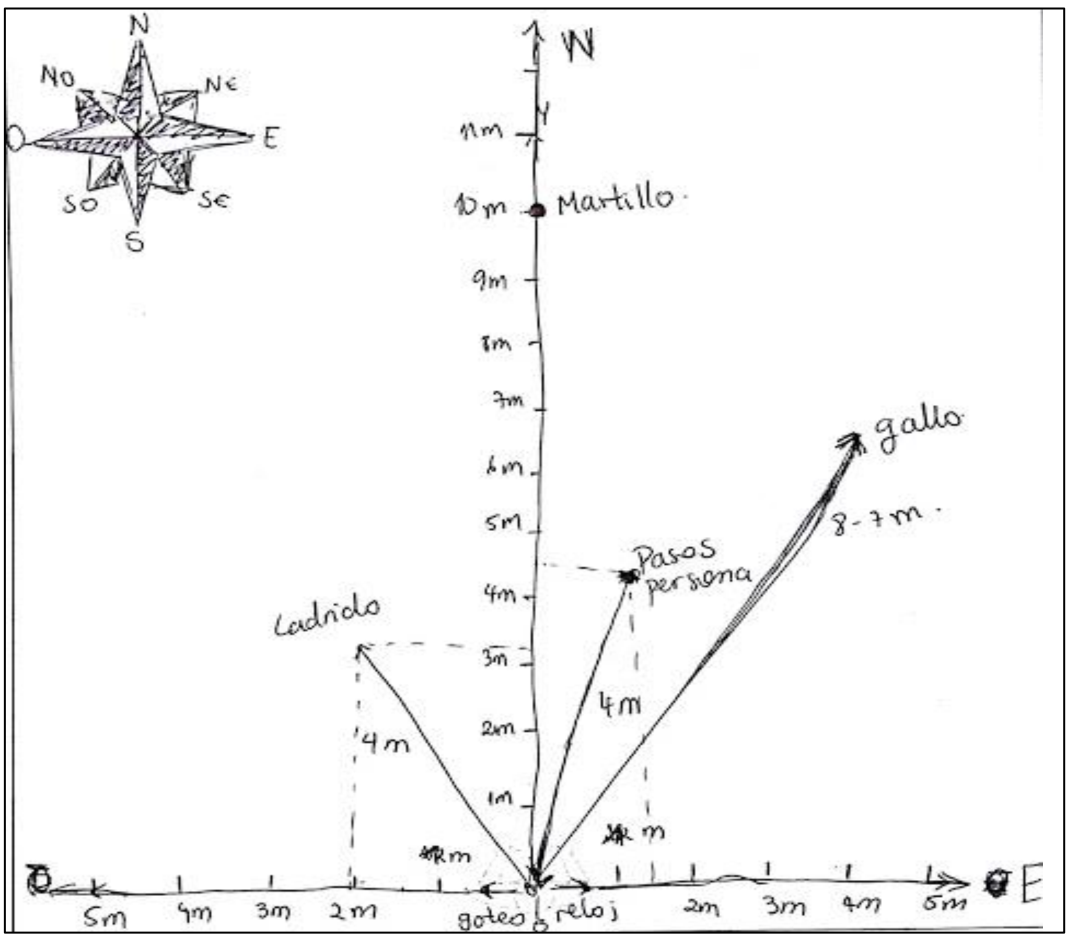


Figura 29: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje geométrico realizado por el Grupo 2.

Primeramente se escucho los paso de una persona que se acerca a uno, desde lado N.E a unos 4m de distanc

- El goteo se siente por el lado O. a unos 50 cm de distancia, y a la misma distancia por lado E. se escucha el reloj.
- El ladrido se siente por el lado NO de manera estática a unos 4 m tambien, pero más hacia "inclinado el vector" que el de la persona
- El Martillo lo identificamos hacia el Norte, de manera estática a unos 10 m (es el maš alejado)
- Finalmente el gallo lo sentimos ~~entre~~ 7 a 8 metros en dirección Noreste.

Figura 30: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el Grupo 2.

Y finamente en el escrito, decidieron explicar la posición de los objetos sonoros, utilizando tanto las distancias, como las referencias cardinales.

8.4.1.3. Grupo 3

Integrado por tres estudiantes, dos de *primer año* de la carrera, uno de ellos estudiante universitario por primera vez, el otro, ya había estudiado otra carrera matemática con anterioridad y un participante especial, ya que era estudiante de kinesiología (I7, I8, I9), que está en su último año de la carrera. Este es el grupo más diverso dentro de la muestra.

Análisis actividad individual

Diagrama y descripción escrita de la escena sonora

Los estudiantes de pedagogía utilizaron líneas rectas para mostrar la ubicación de los sonidos con respecto al auditor, en cambio el estudiante de kinesiología utilizó directamente un plano cartesiano, dando puntos coordenados a los objetos sonoros que escuchó.

Las descripciones de los dos estudiantes de pedagogía fueron similares entre sí, dando posiciones relativas como cerca o lejos, pero también utilizando cantidad de metros estimados. El estudiante de kinesiología usó una mezcla entre puntos cardinales y coordenadas cartesianas. A continuación se muestra los diagramas y escritos realizados:

Informante 7

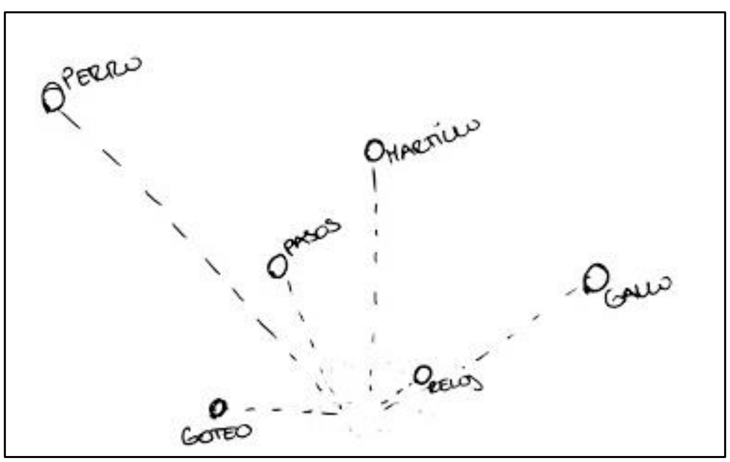


Figura 31: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figural realizado por el I7.

Comienzan a sonar unos pasos a menos de
dos metros en frente y comienzan a acercarse
llendo hacia mi izquierdo. Luego suena
un goteo a menos de un metro cerca del
hombro izquierdo, segundos despues suena
un reloj análogo a unos centímetros del oido
derecho por unos segundos.
Después, comienza el ladrido de un perro
que estaba aproximadamente a unos
cuatro metros al frente izquierdo y antes
de que este termine a unos tres metros justo
en frente suena un martillo por unos
segundos.
Finalmente un gallo directamente a mi
derecho y a unos dos metros comienza
a sonar.

Figura 32: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I7.

El Informante 7, fue muy claro en su descripción, utilizando medidas aproximadas e identificando en qué lugar con exactitud escuchó el sonido. No utilizó un sistema de referencia para ayudarse en la descripción, ni matemático ni cardinal, solo distancias aproximadas.

Informante 8

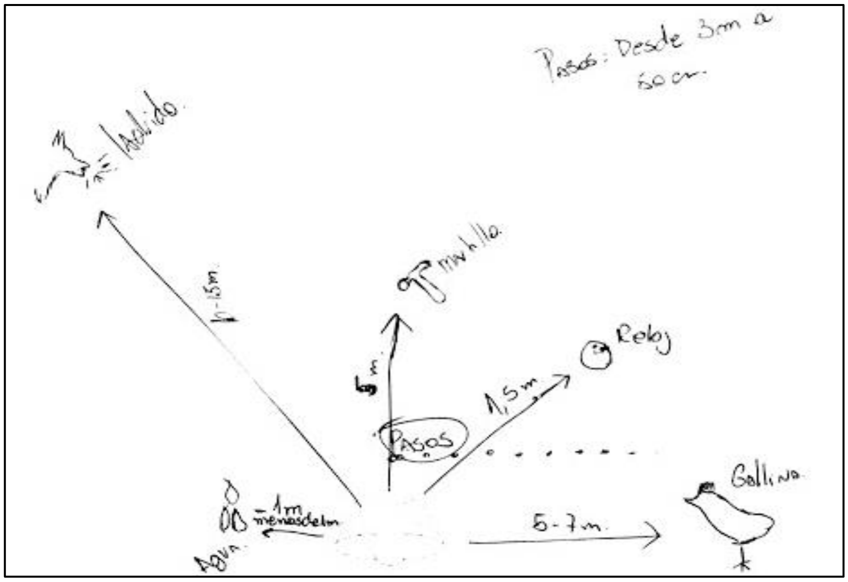


Figura 33: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje figural realizado por el I8.

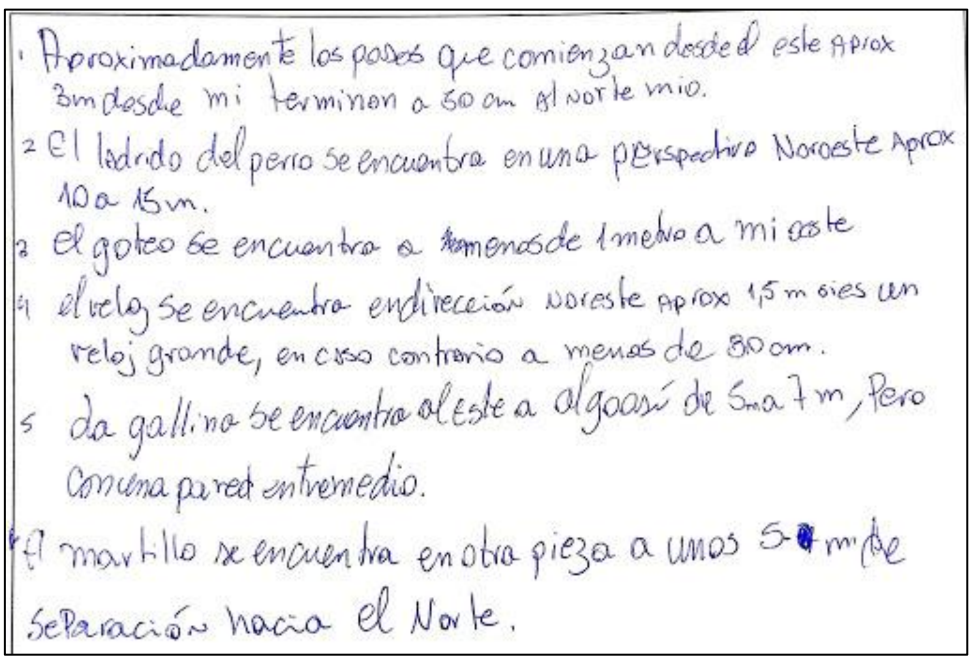

1 Aproximadamente los pasos que comienzan desde el este aprox 3m desde mi terminan a 50 cm al norte mio.
2 El ladrido del perro se encuentra en una perspectiva Noroeste aprox 10 a 15m.
3 el goteo se encuentra a menos de 1 metro a mi oeste
4 el reloj se encuentra en dirección noreste aprox 1,5 m si es un reloj grande, en caso contrario a menos de 80 cm.
5 da gallina se encuentra al este a algo así de 5m a 7m, pero con una pared entremedio.
6 El martillo se encuentra en otra pieza a unos 5-[illegible] m de separación hacia el Norte.

Figura 34: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I8.

El Informante 8, al igual que el I7, se refiere a distancias relativas, pero este utiliza números, ya deja de ser tan subjetivo como el caso anterior, además de ayudarse de los puntos cardinales. No utiliza un sistema de referencias matemático.

Informante 9

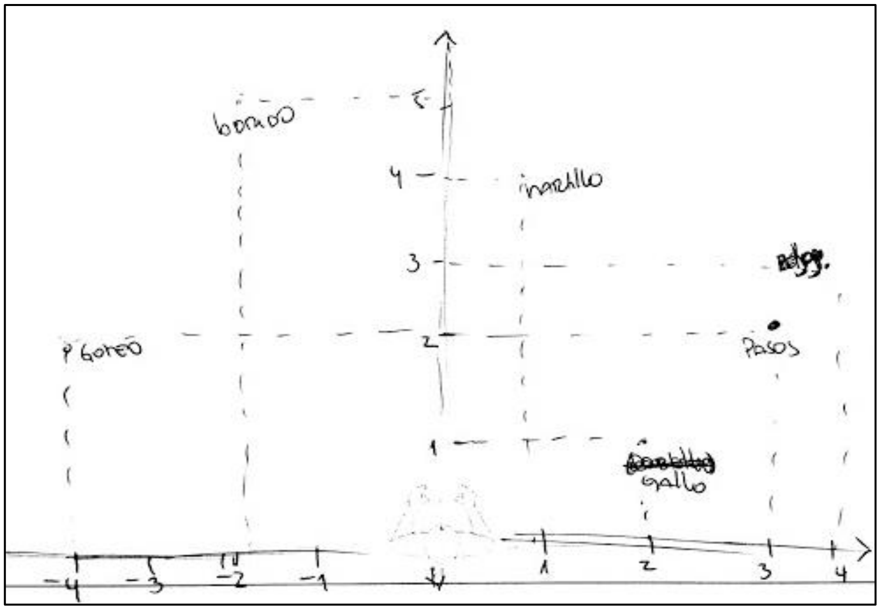
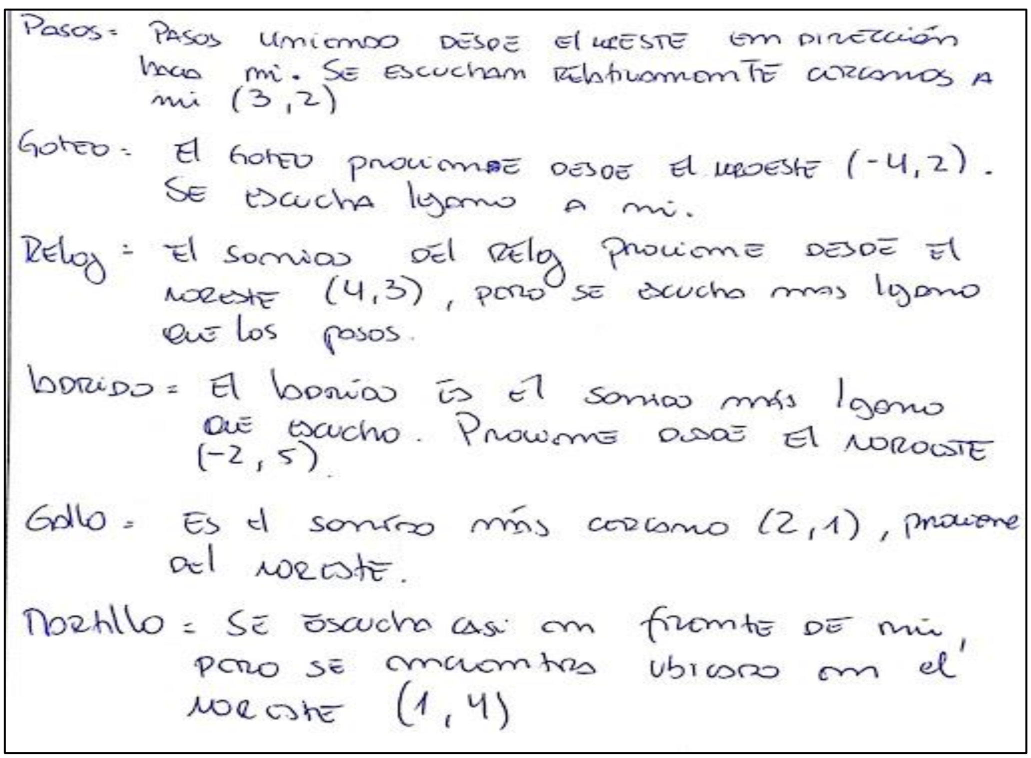


Figura 35: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje geométrico realizado por el I9.


Pasos = Pasos viniendo desde el oeste en dirección hacia mí. Se escuchan relativamente cercanos a mí (3,2)

Goteo = El goteo proviene desde el noroeste (-4,2). Se escucha lejano a mí.

Reloj = El sonido del reloj proviene desde el noreste (4,3), pero se escucha más lejano que los pasos.

Bombo = El bombo es el sonido más lejano que escucho. Proviene desde el noroeste (-2,5)

Gallo = Es el sonido más cercano (2,1), proviene del noreste.

Martillo = Se escucha casi en frente de mí, pero se encuentra ubicado en el noreste (1,4)

Figura 36: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el I9.

El Informante 9, era el estudiante de kinesiología. Podemos notar que utilizó directamente un sistema de referencias cartesiano, ubicando los objetos en el plano, utilizando coordenadas para cada uno de ellos. Es llamativo ver que alguien fuera del área, piense en utilizar este tipo de sistemas, se esperaría que fuera al contrario y que los estudiantes de pedagogía en matemática lo utilizaran con mayor frecuencia.

Análisis actividad grupal

Diagrama y descripción escrita de la escena sonora

La discusión comienza analizando por orden en el que aparecieron los sonidos y están de acuerdo que los pasos se desplazan desde una distancia más lejana hasta llevar al lado del auditor, uno de los estudiantes comenta que escuchó muchos sonidos atrás, pero como sabía que no podían estar atrás los puso adelante, con eso se hace evidente que la percepción sonora es personal. Coincidieron en utilizar un plano cartesiano para realizar el diagrama, pero tuvieron muchas dificultades en ponerse de acuerdo que sonidos estaban más cerca que otros, ya que habían distintas percepciones, este grupo fue el que más tiempo tomó en realizar la actividad, los acuerdos no fueron tan sencillos, incluso pensaron en calcular el punto medio entre el que escuchó más lejos con el que escuchó más cerca. El estudiante de kinesiología influenció bastante en las decisiones finales, posiblemente porque no tenía otra idea distinta a la del plano cartesiano o porque consideraba que era la forma más sencilla de indicar un punto en el plano.

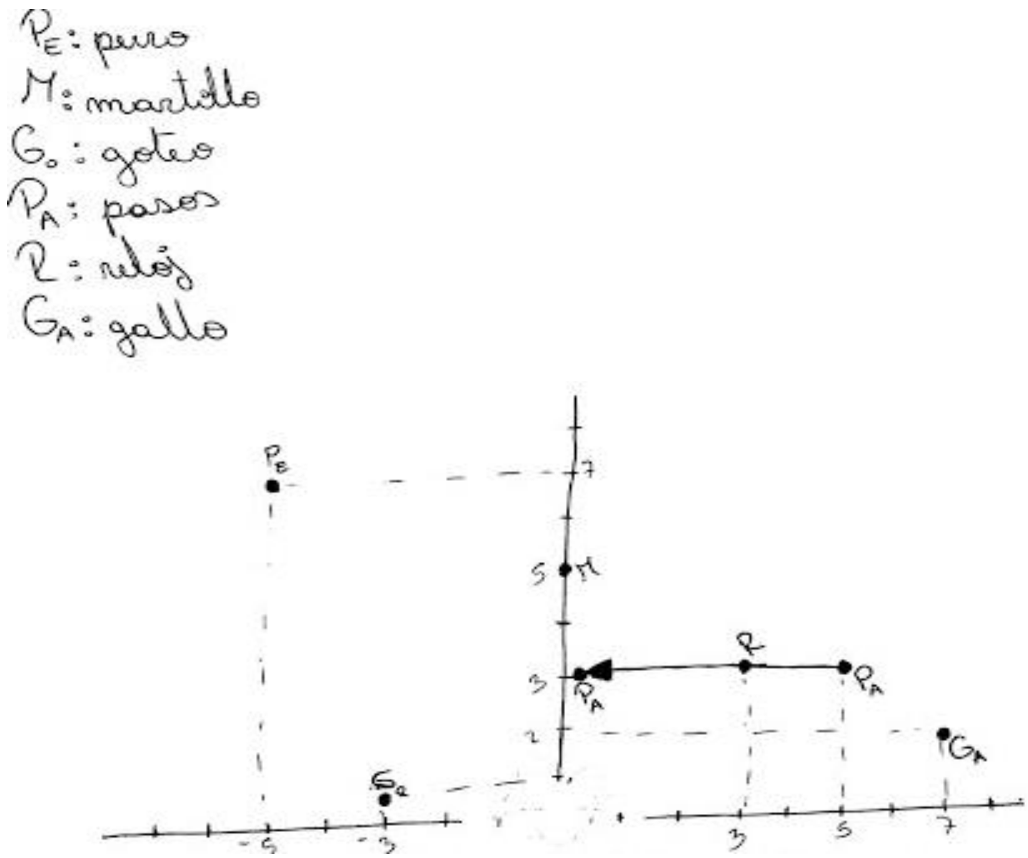


Figura 37: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje geométrico realizado por el Grupo 3.

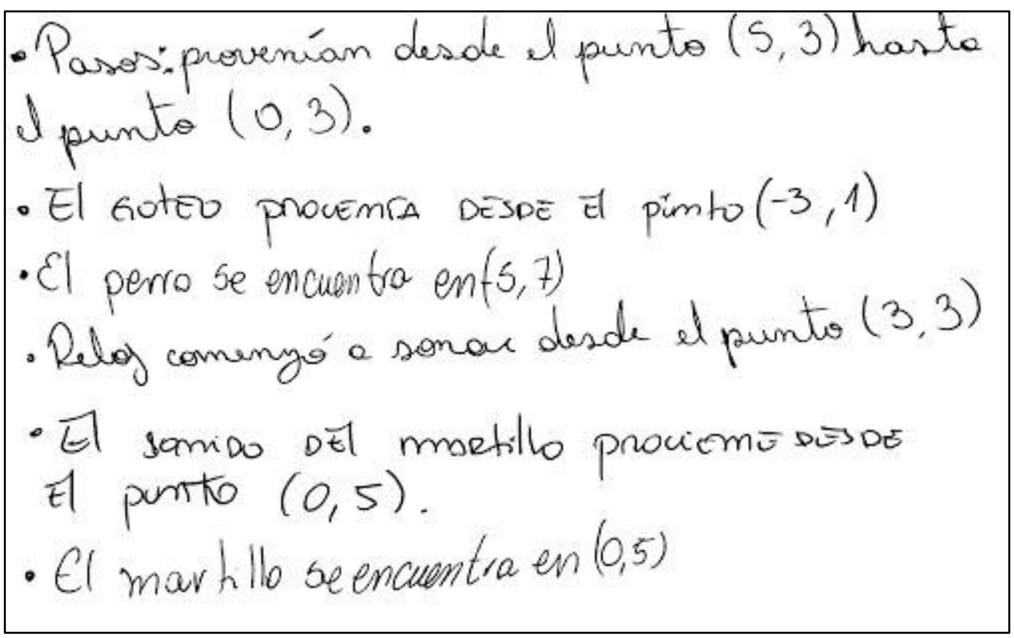

• Pasos: provenían desde el punto (5, 3) hasta el punto (0, 3).
• El GOTEO PROVENIA DESDE EL pinto (-3, 1)
• El perro se encuentra en (5, 7)
• Reloj comenzó a sonar desde el punto (3, 3)
• El SONIDO DEL martillo proviene DESDE El punto (0, 5).
• El martillo se encuentra en (0,5)

Figura 37: Muestra la representación del espacio sonoro en lenguaje natural realizado por el Grupo 3.

Lamentablemente, no hubo mucho interés de parte de Grupo 3, en generar un escrito más detallado y extenso, consideraron que al tener los puntos en el plano cartesiano, era suficiente para explicar la ubicación de los objetos sonoros en un plano.

8.4.1.4. Análisis de las preguntas de estrategia en las encuestas

1. ¿Reconoce algún concepto o habilidad matemática en los procedimientos que utilizó en la actividad? Nómbrelos y destaque aquellos que considere más relevantes.

> Las respuestas a esta pregunta, fueron más variadas de lo que se esperaba, surgieron conceptos como:
>
> Espacio, distancia, plano cartesiano, sistemas de referencia, ubicación de objetos en sistemas con y sin desplazamiento, vectores, puntos en el espacio, distancia según intensidad del sonido, geometría, ubicación espacial a partir de un punto de referencia, sistema de medición, teorema de Pitágoras, suma de vectores.

2. Describa detalladamente la estrategia que usó (paso a paso).

> Las estrategias que surgieron son:
>
> - Realizar la actividad individual y luego comparar con el resto del grupo sus estrategias para llegar a un acuerdo para la actividad grupal.
> - Imaginarse en la situación, tomando los sonidos como una situación real en el espacio y no como sucesos por separado.
> - Imaginarse ubicados en el origen de un plano, primero utilizando puntos cardinales y luego coordenadas cartesianas.
> - Imaginarse en el espacio y le daba valor a la distancia según la intensidad del sonido.
> - Comparar la distancia entre los puntos para evaluar la cercanía.
> - Imaginar un plano cartesiano en 3D (el espacio), para ubicar la posición y profundidad de los sonidos.

3. Haciendo un análisis de la estrategia utilizada, ¿se le ocurre otra estrategia que permite optimizar su desempeño? Descríbala detalladamente.

No surgieron muchas estrategias nuevas, ya que se limitaron mucho al plano cartesiano, a los puntos cardinales y distancias relativas sin un sistema de referencia, de hecho, algunos dijeron que les costó pensar en las que utilizaron y se basaron en los sonidos de la vida cotidiana, otros dejaron en blanco esta pregunta. Algunas de las estrategias que surgieron son:

- Utilizar un plano cartesiano y darle una coordenada a cada sonido para calcular su distancia a través del teorema de Pitágoras.
- Dar puntos de referencia de acuerdo al lugar en donde se aplicó la actividad, en este caso, la sala del departamento de música, así podrían decir que el gallo se encontraba afuera de la sala o cosas así.

8.4.2. Validación

Tipo de estrategia	Análisis a Priori	Análisis Posteriori
Utilizar plano cartesiano para realizar el diagrama que representa la escena sonora.	Se planteó que era posible utilizar un sistema coordenado para ubicar los puntos en el plano, de tal manera que tuvieran una distancia en el eje de las *abscisas x* y las *ordenadas y*.	El plano cartesiano fue una de las estrategias utilizadas por los participantes, tanto para realizar su diagrama como para hacer el escrito de las ubicaciones de los sonidos. Fue la estrategia escogida como definitiva en los tres grupos, es decir, el esquema final, fue hecho utilizando el plano cartesiano y las indicaciones a través de coordenadas.

Utilizar coordenadas polares para realizar el diagrama que representa la escena sonora.	Se planteó que era posible utilizar un sistema de coordenadas polares, utilizando el valor de la distancia y el ángulo de inclinación con respecto a un punto, en este caso, la posición del auditor.	Sólo uno de los participantes recurrió al sistema polar, incluso sin saber que lo estaba utilizando, ya que en el escrito de las indicaciones, puso la distancia aproximada y el ángulo de inclinación del sonido con respecto a una horizontal, al nivel de la cabeza del auditor.
Utilizar vectores bidimensionales para realizar el diagrama que representa la escena sonora.	Se planteó que era posible utilizar un vectores bidimensionales como método para ubicar los sonidos en el plano, utilizando la notación de vector y tal vez, considerar el modulo del vector para calcular la distancia aproximada a la que se encuentra el objeto sonoro.	Hubo algunos diagramas que utilizaron flechas como recursos, pero no basta con eso para definirlo como vector bidimensional, ya que no se especificó la dirección y el sentido en el que se expandía el vector, por tanto, no se puede considerar como un método que se haya utilizado en la experimentación, solo como un breve acercamiento a éstos.
Utilizar puntos cardinales para realizar el diagrama que representa la escena sonora.	A pesar de que los puntos cardinales se pensaron como una estrategia posible, no se consideró en el análisis a priori, ya que, no es un sistema de referencia matemático y perdía un poco el foco de la actividad.	Pese a que no se consideró en el análisis a priori, fue la estrategia más utilizada por los estudiantes, sobre todo cuando debían escribir el escrito, era fácil decir noreste o norte y dar una distancia aproximada. En las actividades individuales fue evidente que lo primero en los que piensan los estudiantes es en los puntos cardinales.

Al contraponer el análisis a priori con el análisis posteriori, se evidencia que los estudiantes utilizaron de manera limitada las representaciones matemáticas y que la problemática planteada, se resuelve de forma muy distinta cuando se trabaja de manera individual y de manera grupal.

8.5. Diagrama Resumen de la Ingeniería Didáctica Realizada

Primera Fase: Análisis preliminares

Fundamentos teóricos: Teoría de las situaciones didácticas, registros de representación semiótica, aprendizaje mediado por computadores. Interdisciplinaridad música y matemática.

Estado del arte: Utilización de recursos musicales en los libros del ministerio de educación.

Población participante: Estudiantes de pedagogía en Matemática de la UMCE.
Presentación de la actividad: Muestra de las posiciones relativas de objetos sonoros según programación.

Segunda Fase: Concepción y Análisis a Priori

- Definición de las variables de control *micro-didácticas*.
- Desarrollo de los instrumentos de investigación.

- Creación de la guía de uso, guía para el estudiante y guía para el profesor.

- Análisis de los posibles resultados y recursos teóricos utilizados por los estudiantes en la resolución de la actividad (plano cartesiano, plano polar, vectores bidimensionales).
- Posibles respuestas a las preguntas de opinión y reflexión.

Tercera Fase: Experimentación

- Previas pruebas de usabilidad.
- Preparación de la sala en la que se aplicaría la actividad.
- Tiempo estimado 45 min por grupo.

- Recolección de datos a través de la observación y de las actividades realizadas, en conjunto con la encuesta final.

- Aplicación realizada el 23 de marzo de 2017.
- Tiempo de duración total: 4 horas cronológicas

Cuarta Fase: Análisis de a Posteriori y Validación

- Análisis de los datos recolectados durante la experimentación.
- Contraposición del análisis a priori y posteriori.
- Validación de las variables micro-didácticas.

CONCLUSIONES

A partir de las actividades y su aplicación, se puede inferir que la muestra de estudiantes de primer y tercer año de pedagogía en matemática de la UMCE, lograron utilizar diversas representaciones matemáticas para caracterizar los sonidos y su ubicación relativa en el espacio virtual sonoro presentado, logrando utilizar el plano cartesiano, la distancia a través del teorema de Pitágoras, algunas representaciones vectoriales y las coordenadas polares de forma indirecta. Pese a ello, no surgió la necesidad de recurrir a los vectores de la forma en que se esperaba, posiblemente porque la mayoría de los sonidos presentados estaban estáticos, y sólo en el caso de los pasos que se acercaban al auditor se genera un movimiento por lo tanto, una distancia con dirección y sentido con movimiento constante.

En base a las actividades propuestas, se evidencia que al momento de trabajar de forma individual surgen ideas más interesantes y variadas, por ejemplo, considerar la inclinación que un objeto tenía con respecto a una horizontal imaginaria, a partir del auditor como centro, o calcular valores numéricos de las distancias, utilizando el teorema de Pitágoras, e incluso, detallar de forma precisa, la duración de los sonidos y de los silencios, la combinación de sonidos en la escena sonora y la percepción del ambiente que pudieron imaginar, pero que al momento de trabajar en equipo, todos llegaron al plano cartesiano como esquema definitivo, simplemente dándole coordenadas a los objetos ubicados, según su posición en el plano. Una de las razones por la cual debió ocurrir esto, debe ser porque necesitaban llegar a consensos y el plano cartesiano puede ser ese punto en común para todos, ya que, desde muy pequeños fue la forma de representar ubicaciones de objetos de forma matemática.

La actividad individual, acerca a los informantes a la experiencia sonora, pero al momento de repetir la escena y trabajar de manera grupal, tienen una base o práctica previa con los sonidos y se vuelve un poco más sencillo ubicarlos en esta segunda etapa.

En la encuesta de opinión y reflexión, se preguntó a los informantes sobre el interés de incorporar elementos de la música o del sonido en la enseñanza de la matemática escolar y el total de los informantes, declaró que les gustaría mucho que dentro de su formación se integrara la interdisciplinariedad entre estas ramas del conocimiento, ya que se pueden encontrar relaciones en muchos aspectos, dándole sentido al contenido que se entrega y mayor significancia para el estudiante que está en su proceso de aprendizaje, también plantearon que es una forma de innovar en los métodos de enseñanza, ya que, muchas veces se vuelven monótonos y no hay un real valor para quien aprende. Exponiendo también, que creían que la música puede ayudar a la comprensión de ciertos conceptos matemáticos, ya que la música, para muchas personas, es muy cercana, por lo tanto aprender conceptos desde un área de interés es más llamativo que aprender porque es necesario aprobar las asignaturas, considerando también, que la música acerca de forma más real ciertos conceptos matemáticos que, muchas veces parecen demasiado abstractos para su total comprensión.

Cuando se les preguntó que si creían que a través del sonido ubicado en un espacio virtual se pueden enseñar vectores, a pesar de que esta pregunta era bastante más especifica que el resto, justificaron que sí se podía, porque teniendo las variables especificadas, como la intensidad del sonido y la percepción del espacio, era más fácil relacionarlo con vectores. Teniendo en consideración los objetivos de la actividad que se plantee, con conocimiento previo de ellos, o al menos de algunas propiedades, como el módulo y la suma de vectores, para así reconocer distancias y desplazamientos y poder recurrir a una medida más precisa.

Una de los cambios importantes que se podrían hacer en la actividad, sería incorporar más sonidos con trayectorias, es decir, que se desplacen dentro de la escena sonora, así, es posible relacionarla aún más con los vectores, considerando también la suma de vectores y las normas de éstos. Tal vez, crear una serie de actividades, en las cuales, se evidencie una secuencia, aumentando el nivel de dificultad para agregar elementos más avanzados de las matemáticas, de tal forma, que en una comienzo, los sonidos sean estáticos, luego que los sonidos incorporen desplazamientos y posteriormente, que el auditor sea el que se desplaza dentro de la escena sonora.

Las preguntas más relevantes dentro del planteamiento del problema fueron; ¿cómo relacionar las disciplinas para lograr los objetivos?, ¿qué herramientas necesita un profesor de matemática, para integrar la música dentro del aula como un recurso para mejorar los aprendizajes? Basándose en los resultados obtenidos en la investigación, se puede responder cada una de las interrogantes, algunas de forma más objetivas que otras. Se puede asegurar que la tecnología es un medio adecuado para trabajar de manera interdisciplinar entre matemática y música, ya que, entrega herramientas que es muy difícil elaborar con otro recurso, tanto generar sonidos adecuados para cierta actividad, como para relacionarlo con gráficos u otro tipo de representación dentro de matemática. Por otro lado, a partir de la investigación se puede deducir que, una de las herramientas que necesita un profesor de matemática para trabajar con la música como un medio de aprendizaje de sus estudiantes, es el manejo de la tecnología y la disposición para aprender nuevas metodologías de enseñanza, además de tener nociones básicas de los conceptos musicales más relevantes, como los parámetros del sonido.

Con respecto a la contraposición del análisis a priori con el análisis posteriori, los resultados estuvieron dentro de lo que se esperaba, sin lograr por completo la aparición de los vectores y las coordenadas polares como los elementos más utilizados, se pensó que sería de esa forma, ya que al momento de pensar en una ubicación dentro de un plano o un espacio, es más natural indicar su distancia y su dirección que pensar en el movimiento en vertical y horizontal que este tiene. Al parecer, a pesar de ser más naturales, no están tan integrados como es el caso del plano cartesiano, lo que genera una limitante al momento de esperar una nueva representación de vectores a través de sonidos ubicados en un espacio virtual sonoro.

Con relación a los objetivos de la investigación, se pudo lograr cada uno de los específicos y además, se utilizaron los vectores para representar la ubicación de objetos sonoros dentro de la situación didáctica propuesta, con el alcance de que no fue el elemento matemático principal al que recurrieron los informantes, siendo ese el objetivo general.

Por otro lado, no se puede dejar de comentar que es posible incorporar esta actividad a una nueva aplicación que estará trabajando el equipo del proyecto PICALAB, la cual, será desarrollado durante los próximos dos años, titulada AudioGeometría, esta actividad podría ser un primer acercamiento a elementos de la geometría (vectores) para la aplicación, que será habilitada para computadores con sistemas operativos Masintosh (Mac) y Windows (PC). En esta futura aplicación, se recomiendo tomar en consideración, que la sensación que produce la sonósfera, es más similar a elevar el sonido que alejarlo, ya que, la percepción sonora es interna, siendo la cavidad craneal del auditor una clase de esfera, en la cual se aprecian los sonidos altos o bajos. Finalmente, tomar en cuenta que no es necesario tener esta plataforma virtual para realizar la actividad, ya que se cuenta con una sonósfera natural, que es el espacio abierto, en donde los estudiantes pueden ser capaces de distinguir distancia y trayectorias prestando más atención a su entorno sonoro, midiendo un espacio real y luego calculando aproximación según las percepciones sonoras del sonido acústico real.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

An, S., Ma, T. & Capraro, M. M. (2011). Preservice Teachers' Beliefs and Attitude About Teaching and Learning Mathematics Through Music: An Intervention Study, School Science and Mathematics, vol. 111, n.5, 236-248.

An, S. (2012). The effects of music-mathematics integrated curriculum and instruction on elementary students' mathematics achievement and dispositions. Tesis doctoral. Texas, USA: A&M University. Recuperado de: http://search.proquest.com/docview/1035271302?accountid=14777

Araya, R. (2004) ¿Qué significa comprender una idea matemática? La Educ@ción, OEA . http://www.educoas.org/portal/bdigital/lae-ducacion/136-138/

Araya, Roberto. (2000). Mathematical Intelligence. Santiago, Chile: Editorial Universitaria.

Artigue M., Douday, M. & Moreno L., Gómez, P., (Eds.) (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M. (1998). L'evolution des probl´ematiques en didactique de l'analyse. Recherches en Didactique des Math´ematiques, vol. 18.2, 231-261.

Artigue, M. & Ervynck, G. (Eds.) (1992). Proceedings of Working Group 3 on students difficulties in calculus. ICME 7. Université de Sherbrooke.

Bamberger, J. & Disessa, A. (2003). Music as embodied mathematics: a study of a mutually informing affinity. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 05-2003, 8, 123–160. Recuperado de: http://link.springer.com/article/10.1023%2FB%3AIJCO.0000003872.84260.96

Benson, D. (2006). Music: a Mathematical Offering. Cambridge: Cambridge University Press.

Beery, E. K. (2003). Affirming parallel concepts among reading, mathematics, and music through kodaly music instruction. Tesis doctoral. Iowa, USA: University of Iowa.

Bruner, J. (1972). Hacia una teoría de la instrucción. Barcelona: Ariel.

Brousseau G. (1998). Théorie des Situations Didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Boyd, J. R. (2013). The relationship between music participation and mathematics achievement in middle school students. Tesis doctoral. Virginia, USA: Liberty University.

Cachafeiro, L. (1989). Buscando recursos para el aula. Suma, 4. 43-45.

Cardalleri, D. (2003). The effects of music instrumental training on performance on the reading and mathematics portions of the Florida Comprehensive achievement test for third grade students. Tesis doctoral. Florida, USA: University of Central Florida.

Carrier, S., Wiebe, E.N. Gray, P. & Teachout, D. (2011). BioMusic in the Classroom: Interdisciplinary Elementary Science and Music Curriculum Development School Science and Mathematics vol. 111, n.8, 425-434

Cheek, J. M. & Smith, L. R. (1999). Music Training and Mathematics Achievement. Adolescence. 34, 13, 759-761.

Courey, S.J., Balogh, E., Siker, J. R. & Paik. (2012). Academic music: music instruction to engage third-grade students in learning basic fraction concepts J. Educ Stud Math n.81, 251–278.

Conde, A. (2009). Las fracciones al ritmo de la música. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En Machado, S.(org.) Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Brasil: Papirus Editora.

Duval, R., (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación, LA GACETA DE LA RSME, Vol. 9.1, 143–168 143.

Erickson, L. H. (2001). Concept-based curriculum and instruction: Teaching beyond the fact. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Fiske, E. B. (1999). Champions of change: The impact of the arts on learning. Washington. DC: The Arts Education Partnership and The President's Committee on the Arts and Humanities.

Fiore, T. (2007). Music and mathematics, (Recuperado de: http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/musictotal.pdf).

Fubini, E. (1988). La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX. Madrid: Alianza.

Galera, M. y Tejada, J. (2010). Editores de partituras y procesos implicados en la lectura musical. Revista Electrónica de LEEME, vol. 25, 65-75 (Recuperado de: http://musica.rediris.es/leeme/revista/galera&tejada10.pdf)

Gardner, H. (1993). The Unschooled Mind: How Children Think And How Schools Should Teach. New York, Basic Books.

González, P.M. (2008). La dimensión cultural del número. El legado de Pitágoras. Ponencia presentada en el 10º Congreso Castellano y Leonés de Educación Matemática. Segovia, España.

Hammel, T., Vaughan C. (1995). "Math and Music", Dale Seymour Publications Palo Alto California.

Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. Journal for Research in Mathematics Education, 30, 3-19.

Hoppin R. (1992). La Música Medieval, Ediciones Akal.

Johnson, G. & Edelson, J. (2003). Integrating Music and Mathematics in the Elementary Classroom, Teaching children mathematics vol. 9, n.8, 474-479

Liern, V. (2008). La música y el número siete. Historia de la relación controvertida. Revista Suma, 58, 137-143.

Mankiewiez R. (2000). Historia de las matemáticas: del cálculo al caos, Paidos, Barcelona.

Méndez, L.. (2011). El conocimiento situado y los sistemas de actividad. Un modelo teórico para repensar el prácticum. Revista de Educación, vol. 359, 629-642.

Mertoglu, E. (2010). A Study on the Relationship Between the Rhythm and Mathematics Skills of 5-6 year old Children. Gifted Education International vol. 26, 26-34.

MINEDUC (2015). Programa de Estudio de Tercero medio, Primera edición, Santiago de Chile, Unidad de Currículum y Evaluación, ISBN 978-956-292-531-0.

Miraya, F. (2005). La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis y más acá. Rosario, Argentina: Universidad Nacional.

Morris, C, (1985). Fundamentos de la teoría de los signos. Editorial Paidós. España, 23-69.

Pais, L. (2002). Didática da Matemática: Uma análise da influencia francesa. Brasil: Auténtica Editora, Rua Januária.

Peralta, J. (2003). Matemáticas para no desafinar. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol. 6.2, 437–456.

Puckette, M. (1996). Pure Data. Proceedings of the International Computer Music Conference. San Francisco: International Computer Music Association, 224-227.

Puebla, L. E. (1999). ¿Matemáticas en la Música? Miscelánea Matemática, 27. 15-27.

Riquelme, I. (1989) Musimatemágica, publicado por INTEM.

Rudd, S. (2000). Music as an exemplar of mathematics: implications for integrating math with music education Tesis doctoral. Claremont, USA: Claremont Graduate University.

Spiro, R. & Jehng, J. (1990). Cognitive flexibility and hypertext: Theory and technology for the nonlinear and multidimensional traversal of complex subject matter. En Nix, D. and Spiro, R. (eds.) Cognition, Education & Multimedia. Hillsdale: Laurence Erlbaum Associates.

Thayer, T., Tejada, J. Cádiz, R., de la Cuadra, P., Ledermann, R. y Petrovich, M. (2012). An interdisciplinary approach for mathematical education based on musical metaphors. XVII Congreso Internacional de Informática Educativa, Santiago, Chile.

Tobias, S. (1998). Anxiety and mathematics. Harvard Education Review, 50, 63–70.

Vaughn, K. (2000). Music and Mathematics: Modest Support for the Oft-Claimed Relationship, Journal of Aesthetic Education vol. 34, 3-4.

Whitehead, B. (2001). The effect of music- intensive intervention on mathematics scores of middle and high school students Tesis doctoral. Minneapolis, USA: Capella University.

Recursos Digitales

http://iem.at

https://www.teoria.com/es/articulos/kdf/I/

https://es.wikipedia.org/wiki/Contrapunto

https://es.wikipedia.org/wiki/Pure_data#Patch_patrones

ANEXOS